CONTENIDOS

- Logaritmos
- Función Logaritmo
- Gráficos y propiedades de los logaritmos
- Nuevas propiedades de los logaritmos
- Análisis de funciones logarítmicas
- El logaritmo natural
- Relación entre función exponencial y función logarítmica
- Expresión de una función exponencial conociendo puntos de su gráfico
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- Otros tipos de ecuaciones exponenciales
- Ecuaciones con logaritmos

En el capítulo anterior se ha estudiado el comportamiento de procesos que crecían o decrecían de manera exponencial. Estos modelos matemáticos resultan fértiles para resolver varios tipos de situaciones. Pero a su vez, hay algunos aspectos que precisan ser estudiados con mayor profundidad pues, los tratados hasta aquí, resultan insuficientes para resolver algunas cuestiones.

3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Problema 1

Si un cierto día, la temperatura es de 28°, y hay mucha humedad, es frecuente escuchar que la sensación térmica es de, por ejemplo, 32°. La sensación térmica depende de muchas variables y resulta muy complejo tratar con todas ellas simultáneamente. Por eso, en este caso, se considerarán como variables que se relacionan la sensación térmica en función únicamente de la humedad. Es decir, existe una fórmula que relaciona la sensación térmica en función de la humedad, para la temperatura de 28° centígrados y la velocidad del viento de 10 km/h. Dicha fórmula es: $ST(h) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^{h}$ donde h es el porcentaje de la humedad (que deberá ser mayor o igual a 60%) y ST es la sensación térmica en grados centígrados.

Si un día la temperatura es 28° y la velocidad del viento de 10km/h:

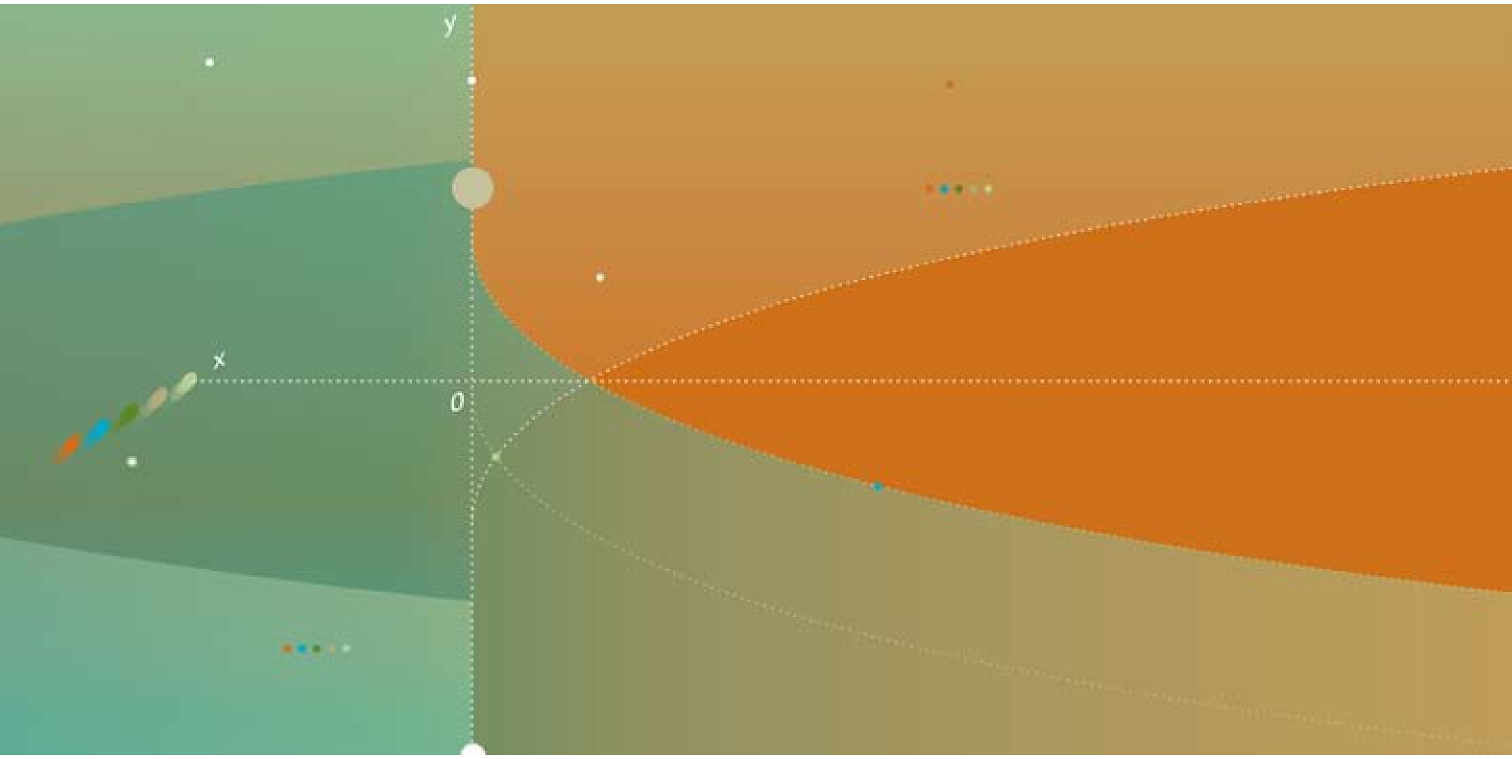
a. ¿Cuál es la sensación térmica si la humedad es de 60%? ¿Y de 80%? ¿Y de 100%?

b. ¿Cuál será la humedad si se sabe que la sensación térmica es de 30,4°?

Para determinar la sensación térmica para un día con 60% de humedad se reemplaza en la fórmula y se obtiene:

$$ST\ (60) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^{60} \approx 22{,}86.1{,}27 \approx\ 29{,}03$$

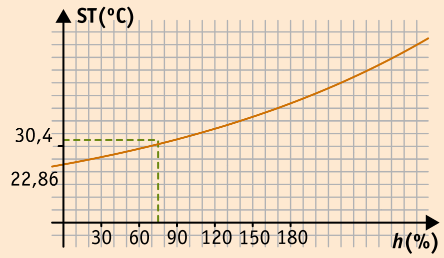
Es decir, la sensación térmica será aproximadamente de 29,03°.



Si la humedad es de 80% o 100% se repite el procedimiento anterior y se obtiene:

Porcentaje de humedad	Sensación térmica
80%	$22{,}86 \cdot 1{,}004^{80} \approx 22{,}86.1{,}376 \approx 31{,}46°$
100%	$22{,}86 \cdot 1{,}004^{100} \approx 22{,}86.1{,}49 \approx 34{,}06°$

Determinar la humedad, sabiendo que la sensación térmica es de 30,4°, no parece ser tan sencillo. Por los datos que se obtuvieron antes, como la sensación térmica para 60% de humedad es de 29,03° y para 80% de humedad es de 31,4°, se puede anticipar que si la sensación térmica es de 30,4° la humedad está entre 60% y 80%. Pero es posible hacer un gráfico de la sensación térmica, en función de la humedad, que permitirá saber, con mayor aproximación el porcentaje de humedad.



Gracias al gráfico es posible anticipar que, si la sensación térmica es de 30,4°, la humedad estará entre 70 % y 80 %.

Las funciones exponenciales son de la forma:

$f(x) = k \cdot a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$ y $k \neq 0$

a se denomina base y x exponente.

En este caso, $f(x) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^x$

¿Cómo se podrá hacer para saber con mayor exactitud el porcentaje de humedad?
Para ello habrá que encontrar el valor de h que sea solución de la ecuación:

$$ST(h) = 22{,}86 \cdot 1{,}004^h = 30{,}4 \Leftrightarrow 1{,}004^h = 30{,}4 : 22{,}86 \Leftrightarrow 1{,}004^h \approx 1{,}33$$

Hasta el momento no se ha estudiado un método para resolver la ecuación anterior, pero puede hacerse una tabla teniendo en cuenta que h debe estar entre 70 y 80.

h	70	71	72	73	74
$1{,}004^h$	1,32239	1,32768	1,33299	1,3383	1,3437

Puede decirse, entonces, que la humedad tendrá que ser un valor entre 72% y 73%. Se podría seguir de esta manera aproximando con decimales pero se analizará una herramienta que permitirá hallar el valor de h de manera exacta. Para encontrarlo se usan los logaritmos.

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
donde $a > 0$; $a \neq 1$ y $b > 0$.

El logaritmo en base a de un número b es la potencia c, a la que hay que elevar el número a para que dé por resultado el número b. Simbólicamente se escribe:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

y se lee logaritmo en base a de b es igual a c.
Esta definición es válida para $a > 0$ pero diferente de 1 y $b > 0$.

Una cuestión de escritura:
$\log_{10} b$ se nota $\log b$
Es decir, si no se escribe la base, se asume que el logaritmo es en base 10.

Por ejemplo:

$\log_2 8 = 3$	pues	$2^3 = 8$
$\log_3 729 = 6$	pues	$3^6 = 729$
$\log_{10} 0{,}001 = -3$	pues	$10^{-3} = 0{,}001$

Se pueden analizar las restricciones que propone la definición:

- a debe ser positivo porque hace referencia a la base de una función exponencial y en el capítulo anterior se analizó que para que el dominio de esta función sean todos los números reales es necesario que dicha base sea positiva.
- $a \neq 1$ porque $\log_1 x$ solo podría calcularse cuando $x = 1$ ya que $1^c = 1$ para cualquier valor de c. No tiene sentido analizar esta función ya que su dominio es un solo número y su gráfica es un punto.
- $b > 0$ porque resulta de una potencia de a (que es positivo).

Función logaritmo

A partir de la definición de logaritmo en base a, es posible definir una función, la función logaritmo, de la siguiente manera: $f(x) = \log_a x$.
En esta función, a es un número positivo, distinto de 1 y $x > 0$.

Problema 2
Trazar el gráfico de la función $g(x) = \log x$.

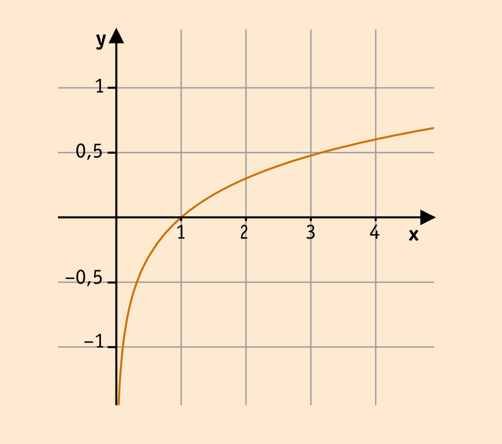
Una tabla de valores ayudará a imaginar el gráfico. Para ello es oportuno utilizar la calculadora científica y aproximar resultados.

Algunos de los valores pueden calcularse sin necesidad de usar la calculadora, por ejemplo:

$\log 1 = 0$ porque $10^0 = 1$	$\log 10 = 1$ porque $10^1 = 10$
$\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$	$\log 0{,}1 = -1$ porque $10^{-1} = 0{,}1$
$\log 0{,}01 = -2$ porque $10^{-2} = 0{,}01$	$\log 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

Al volcar estos valores, y otros obtenidos con la calculadora, en un gráfico, se obtiene un dibujo como el siguiente:

x	**log x**
1	0
2	0,3
4	0,6
10	1
30	1,48
50	1,7
100	2
0,01	–2
0,001	–3



En el gráfico, se puede observar que la variable x solo puede adquirir valores positivos, tal como se proponía en la definición, pues toda potencia de 10 es positiva.

Esto se debe a que:

$g(x) = \log x$	$\Leftrightarrow$	$10^{g(x)} = x$

De la última igualdad se deduce que $g(x)$ puede tomar cualquier valor, mientras que x debe ser positiva, ya que ninguna potencia de 10 es negativa o nula. Por lo tanto, se obtiene que:

$$Dom(g) = (0\,;+\infty),\ Im(g) = \mathbb{R}$$

Por otro lado es posible notar que, a medida que el valor de x es más cercano a 0, los valores que toma el logaritmo son negativos y cada vez más grandes en valor absoluto. Si se analiza la siguiente tabla:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,000001
$\log x$	–1	–2	–3	–4	–6

Se observa que: $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log x) = -\infty$

Por lo tanto hay una asíntota vertical en el eje y, es decir, en la recta $x = 0$.

También se verifica que $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

Esto ocurre pues:

$$\left.\begin{array}{l} A = \log_a x \Rightarrow a^A = x \\ B = \log_a y \Rightarrow a^B = y \end{array}\right\} \text{Como } A = B \Rightarrow x = y$$

Para determinar el valor del logaritmo en base 10 usando la calculadora se procede de la siguiente manera:

Por ejemplo, para conocer el valor de log 4, en algunas calculadoras hay que oprimir las siguientes teclas: **4** **log** **=**

y se obtiene 0,6020599...

En otro tipo de calculadoras, hay que oprimir:

log **4** **=**

Del mismo modo en que se ha definido la función $g(x) = \log x$ se podrían definir otras funciones modificando el valor de la base, como:

$t(x) = \log_3 x$

$m(x) = \log_5 x$

Es decir, para cada valor de la base, se define una nueva función logarítmica.

Si $g(x) = \log_a x$
$Dom(g) = (0\,;+\infty)$
$Im(g) = \mathbb{R}$

Si $g(x) = \log_a x$, entonces $x = 0$ es asíntota vertical de $g(x)$.

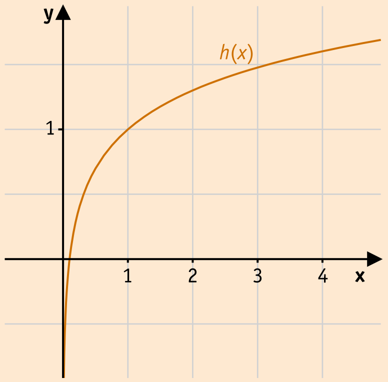
$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$

Desplazamientos de la gráfica

Problema 3

Graficar la función: $h(x) = \log x + 1$

La función $h(x)$ proviene de sumar 1 a cada imagen de la función $\log x$, graficada en el problema 2. Por lo tanto, es posible suponer que su gráfico tendrá la misma forma, pero desplazado una unidad hacia arriba:



Como la definición de logaritmo es para valores positivos de x, se tiene:

$$\mathrm{Dom}(h) = (0\,;+\infty)$$

La asíntota vertical permanece en el eje y porque esta función es un desplazamiento hacia arriba de la anterior.

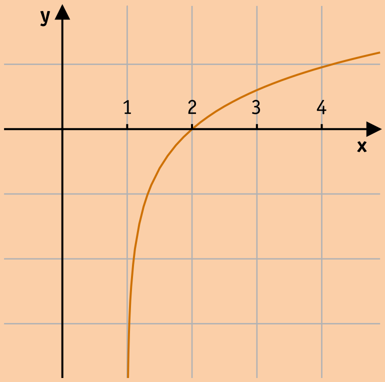
Hay dos propiedades que provienen de la definición de logaritmo:

- $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$
- $\log_a a^x = x$ pues $a^x = a^x$

Problema 4

¿Cómo será la expresión de una función $h(x)$ que sea un desplazamiento de $g(x) = \log x$, tenga el siguiente gráfico y responda a la tabla de valores presentada?

x	***h(x)***
2	0
3	0,3
5	0,6
11	1
101	1
1,1	–1
1,01	–2



Si se analiza con detenimiento la tabla y el gráfico, es posible reconocer que es un desplazamiento de la función $g(x) = \log x$ una unidad hacia la derecha. Por lo tanto, si la asíntota vertical de g se encontraba en $x = 0$, en esta función se corre a $x = 1$.

Por otro lado, $h(11) = g(10)$ así como $h(101) = g(100)$. Por lo tanto es posible determinar que $h(x) = g(x - 1) = \log(x - 1)$

En esta función, como el logaritmo solo puede calcularse para valores positivos, $x - 1$ deberá ser positivo, por lo tanto $\mathrm{Dom}(h) = (1\,;+\infty)$

Se puede resumir en la siguiente tabla las transformaciones de g(x) = log(x), para valores de *m* y *k* positivos:

	Dominio	Desplazamiento	Asíntota
$h(x) = \log x + m$	$(0\,;+\infty)$	*m* unidades hacia arriba	$x = 0$
$t(x) = \log x - m$	$(0\,;+\infty)$	*m* unidades hacia abajo	$x = 0$
$s(x) = \log\,(x + k)$	$(-k\,;+\infty)$	*k* unidades a la izquierda	$x = -k$
$n(x) = \log\,(x - k)$	$(k\,;+\infty)$	*k* unidades a la derecha	$x = k$

Gráficos y propiedades de logaritmos

La siguiente situación propone estudiar el gráfico de otra función logarítmica que permitirá identificar una nueva propiedad.

Problema 5

Graficar la función $t(x) = \log_2(2x)$ y relacionarla con la función $g(x) = \log_2 x$.

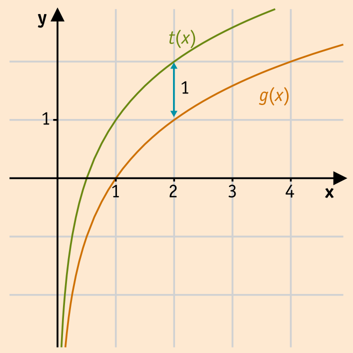
Una tabla puede ayudar a construir el gráfico. Para ello es conveniente elegir algunos valores para *x* de manera tal que los cálculos resulten más sencillos:

x	$2x$	$\log_2(2x)$	Porque…
$\frac{1}{2}$	1	0	$2^0 = 1$
2	4	2	$2^2 = 4$
4	8	3	$2^3 = 8$
8	16	4	$2^4 = 16$

Si se grafican en el mismo sistema $t(x) = \log_2(2x)$ y $g(x) = \log_2 x$, se tiene que:

el gráfico de $t(x)$ está desplazado una unidad hacia arriba respecto del de $g(x)$.

$t(x) = \log_2(2x)$
$g(x) = \log_2 x$



Al observar los gráficos podría llegarse a la conclusión de que

$$t(x) = \log_2(2x) = \log_2 x + 1 = s(x)$$

¿Cómo será posible que los gráficos de t(x) y de s(x) sean iguales?

¿Será cierto que $\log_2(2x) = \log_2 x + 1$*?*

Si $y = \log_2 x$ se verifica que $x = 2^y$, además:

$\log_2 (2x) = \log_2 (2^1 \cdot 2^y)$	Porque $2 = 2^1$ y $x = 2^y$.
$\log_2 (2x) = \log_2 (2^{y+1})$	Por multiplicación de potencias de igual base.
$\log_2 (2x) = y + 1$	Por propiedad de logaritmos $\log_a a^x = x$.
$\log_2 (2x) = \log_2 x + 1$	Porque $y = \log_2 x$.
$\log_2 (2x) = \log_2 x + \log_2 2$	Porque $1 = \log_2 2$.

Se verifica que:

$\log_2 (2x) = \log_2 x + \log_2 2 = \log_2 x + 1$ donde x es un número real positivo.

Es posible pensar entonces que son válidas las siguientes propiedades:

- Si m, n y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, entonces

$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Esto es cierto dado que:

$$\log_a m = t \Leftrightarrow a^t = m \quad (1)$$
$$\log_a n = y \Leftrightarrow a^y = n \quad (2)$$

Luego:

$\log_a (m \cdot n) = \log_a (a^t \cdot a^y)$	Reemplazando por (1) y (2).
$\log_a (m \cdot n) = \log_a (a^{t+y})$	Por multiplicación de potencias de igual base.
$\log_a (m \cdot n) = t + y$	Por propiedad de logaritmos $\log_a a^x = x$.
$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$	por (1) y (2).

En consecuencia, $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

Se verifican las siguientes propiedades:

- Si $x > 0,\ y > 0 \Rightarrow$ $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Si $m > 0, n > 0 \Rightarrow$ $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

- De manera similar se puede probar que:

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

Es interesante analizar que las dos últimas igualdades, así como toda igualdad, puede leerse de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

Así, el logaritmo de un producto puede escribirse como suma de logaritmos y también una suma de logaritmos puede escribirse como el logaritmo de un producto, según resulte conveniente y si los números involucrados son positivos.

Estas propiedades son útiles para determinar los valores de algunos logaritmos a partir de otros. Por ejemplo, si se conoce que $\log 2 \approx 0{,}3$

$$\log 50 = \log \left(\frac{100}{2}\right) = \log 100 - \log 2 = 2 - \log 2 \approx 2 - 0{,}3 = 1{,}7$$

$$\log 2000 = \log (2 \cdot 1000) = \log 2 + \log 1000 \approx 0{,}3 + 3 = 3{,}3$$

ACTIVIDADES

1. ¿Es cierto que los gráficos de $f(x) = \log (10\,x)$ y de $h(x) = \log x + 1$ son iguales? Expliquen por qué.

2. Calculen

a. $\log_6 81 + \log_6 16$ **b.** $\log 6000 - \log 6$
c. $\log_3 54 - \log_3 162$ **d.** $\log 550 - \log 55$
e. $\log_5 250 + \log_5 0{,}1$ **f.** $\log_2 24 - \log_2 6$

Nuevas propiedades de los logaritmos

Problema 6

Graficar las funciones $f(x) = \log_2 x^3$ y $h(x) = 3 \cdot \log_2 x$. Analizar las diferencias y similitudes entre ellas.

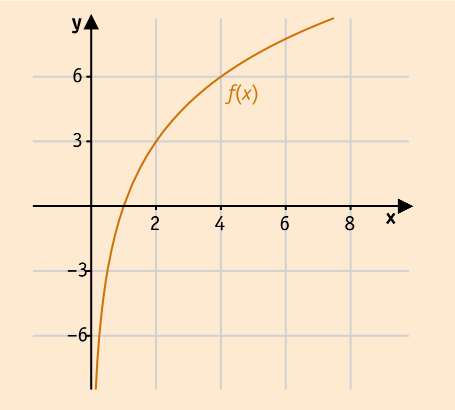
Para la función $f(x)$, como el logaritmo solo puede aplicarse a números positivos, es necesario que x^3 lo sea, por lo tanto x debe ser positivo. Se obtiene que $\mathrm{Dom}(f) = (0 ; +\infty)$.

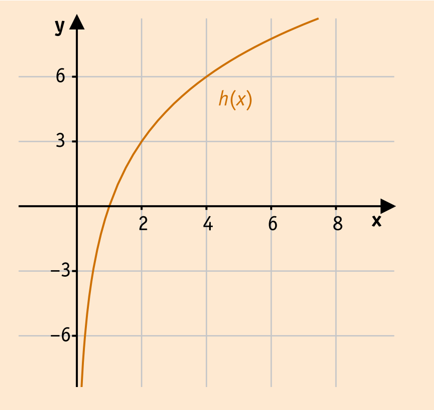
Si se realiza el mismo análisis para la función $h(x)$, también se obtiene que $\mathrm{Dom}(h) = (0 ; +\infty)$.

En una tabla con valores se obtiene:

x	x^3	$\log_2 x$	$f(x) = \log_2 x^3$	$h(x) = 3 \cdot \log_2 x$
1	1	0	0	0
2	8	1	3	3
4	64	2	6	6
8	512	3	9	9
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	–1	–3	–3
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{64}$	–2	–6	–6

Si se realizan los gráficos de ambas funciones, es posible advertir que las funciones son iguales.





¿Cuáles serán los motivos por los cuales los gráficos de $f(x) = \log_2 x^3$ y de $h(x) = 3 \cdot \log_2 x$ son iguales?

$$\log_2 x^3 = \log_2 (x \cdot x \cdot x) \underset{\text{por la propiedad del logaritmo del producto}}{=} \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 3 \cdot \log_2 x$$

Esta demostración permite afirmar que $\log_2 x^3 = 3 \cdot \log_2 x$ para cualquier valor positivo de x.

A partir de esto, se podría pensar que, si $a > 0$, $a \neq 1$; $m > 0$ y n es un número natural:

$$\log_a m^n = \log_a \underbrace{(m \cdot m \cdot m \ldots m)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{\log_a m + \log_a m + \ldots\ldots + \log_a m}_{n \text{ veces}} = n \cdot \log_a m$$

Es decir que $\log_a m^n = \mathrm{n} \cdot \log_a m$

¿Qué sucede si n no es un número natural?

Si se toma:

$$\log_a m^n = x \text{ y } \log_a m = t \quad \Rightarrow \quad a^x = m^n \text{ y } a^t = m$$

Luego:

Si $a > 0, a \neq 1$ y $m > 0$ es válido que:
$\log_a m^n = n \cdot \log_a m$

$a^x = m^n$	$\Leftrightarrow$	$a^x = (a^t)^n$	$\Leftrightarrow$	$a^x = a^{n \cdot t}$

La única manera de que dos potencias de la misma base sean iguales es si sus exponentes lo son $\Rightarrow$ $x = n \cdot t$ $\Leftrightarrow$ $\log_a \mathrm{m}^n = n \cdot \log_a m$

La demostración anterior indica que la propiedad vale para cualquier exponente n.

Cambio de base

Problema 7

Resolver con calculadora los siguientes logarítmos:

$\log_2 16$ $\qquad$ $\log_2 25$ $\qquad$ $\log_3 15$

En las calculadoras científicas aparecen dos logaritmos representados con las siguientes teclas: **log** y **ln**.

Por el momento solo se usará la tecla **log** que, como ya se ha comentado, permite calcular el logaritmo en base 10. Más adelante se explicará qué significa la otra tecla.

¿Cómo se podrá hacer para determinar el $\log_2 16$ usando la calculadora?

Para ello se puede pensar de la siguiente manera: calcular $\log_2 16$ significa encontrar un número x, tal que el resultado de 2 elevado a ese número x dé 16. Esto quiere decir:

$$\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16$$

Fácilmente se verifica que $x = 4$, es decir, $\log_2 16 = 4$. En este caso el uso de la calculadora es innecesario, porque 16 es una potencia entera de 2. Sin embargo esto no sucede con 25.

$\log_2 25 = x$	
$2^x = 25$	Se aplica la definición de logaritmos.
$\log(2^x) = \log 25$	Se toma log en ambos miembros de la igualdad.
$x \cdot \log 2 = \log 25$	Se usa la propiedad de logaritmo de la potencia.
$x = \dfrac{\log 25}{\log 2} = \dfrac{1{,}3979}{0{,}301} \approx 4{,}64$	Se opera.

Por lo tanto para calcular el logaritmo en cualquier base de un número puede hacerse el cociente entre el logaritmo en base 10 de ese número dividido el logaritmo en base 10 de la base: $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$.

¿Será siempre cierta esta igualdad aunque no se quiera usar base 10?

Si se quiere calcular $\log_a m$ utilizando $\log_b$:

$$\log_a m = r \iff a^r = m$$
$$\log_b m = t \iff b^t = m$$

Luego se verifica que $a^r = b^t$.

$\log_b a^r = \log_b b^t$	Se toma $\log_b$ en ambos miembros de la igualdad.
$r \cdot \log_b a = t \cdot \log_b b$	Se usa la propiedad de logaritmo de la potencia.
$r \cdot \log_b a = t$	Se usa la propiedad $\log_b b = 1$.
$r = \dfrac{t}{\log_b a}$	Se despeja *r*.
$\log_a m = \dfrac{\log_b m}{\log_b a}$	Se reemplaza *r* y *t*.

En definitiva, para calcular $\log_3 15$, se puede hacer $\dfrac{\log 15}{\log 3} = 2{,}464973521\ldots$. Para verificar el resultado es necesario considerar que 3 elevado a esa potencia da 15 como resultado: $3^{2{,}464973521\ldots} = 15$.

Esta propiedad se conoce con el nombre de *cambio de base*.

Problema 8

¿Es cierto que las funciones $f(x) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right) + \log\left(\frac{x+1}{x}\right) - \log(x^2 - 1)$ y $g(x) = -2 \cdot \log(x - 1)$ son iguales?

Dos funciones son iguales si para cada elemento del dominio se obtienen imágenes iguales a través de las dos funciones. La idea es que si *f(x)* y *g(x)* son iguales, da lo mismo aplicar una u otra para hallar la imagen de un número porque se obtienen los mismos resultados.

Ahora bien, en este capítulo se desarrollaron propiedades de los logaritmos que permiten obtener expresiones equivalentes a una dada. Si se usan, es posible transformar la fórmula de la función *f(x)*:

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{x-1}\right) + \log\left(\frac{x+1}{x}\right) - \log(x^2 - 1) =$$
$$= \cancel{\log x} - \log(x - 1) + \log(x + 1) - \cancel{\log x} - \log[(x - 1)(x + 1)] =$$
$$= -\log(x - 1) + \cancel{\log(x + 1)} - \log(x - 1) - \cancel{\log(x + 1)} = -2 \cdot \log(x - 1)$$

Por lo tanto, $f(x) = -2 \cdot \log(x - 1)$.

Al aplicar las propiedades se estaría indicando que $f(x) = g(x)$. Sin embargo, si se quiere hallar la imagen de -2 a través de ambas funciones, resulta:

$$f(-2) = \log\frac{-2}{-2-1} + \log\frac{-2+1}{-2} - \log\left((-2)^2 - 1\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log 3$$
$$g(-2) = -2\log(-2)$$

Pero $g(-2)$ no se puede calcular debido a que el logaritmo de un número negativo no existe. -2 no pertenece al dominio de la función *g(x)*, aunque sí pertenece al dominio de *f(x)*. Luego, las funciones no pueden ser iguales.

¿Por qué al aplicar las propiedades se obtuvo una información "falsa"?

En realidad, el problema consistía en aplicar las propiedades de los logaritmos sin tener en cuenta en qué condiciones pueden usarse.

Se presentan a continuación todas las propiedades tratadas hasta el momento que verifican los logaritmos:

En todos los casos $a > 0, a \neq 1, b > 0, x > 0, y > 0, c > 0$

1. $\log_a b = c \iff a^c = b$
2. $x = y \iff \log_a x = \log_a y$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a a^t = t$
5. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,
6. $\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$
7. $\log_a b^t = t \cdot \log_a b$
8. Si además $b \neq 1$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Para que $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ y $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$ es necesario que todos los logaritmos estén definidos y, para que eso suceda m y n deben ser números positivos.

En el caso de las funciones que se consideran en este problema se puede calcular el dominio de cada una. No es difícil hallar el dominio de $g(x)$. Para que el logaritmo de $x - 1$ esté definido es necesario que $x - 1$ sea un número positivo:

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Luego, $\text{Dom}(g) = (1\ ;+\infty)$.

El dominio de $f(x)$ es más complejo de hallar, ya que el argumento de cada logaritmo debe ser positivo:

$$\frac{x}{x-1} > 0 \quad ; \quad \frac{x+1}{x} > 0 \quad ; \quad x^2 - 1 > 0$$

En el caso de las dos primeras inecuaciones, para que los cocientes sean positivos el numerador y el denominador tienen que tener el mismo signo.

Para la primera inecuación se obtiene:

$x > 0$ y $x - 1 > 0$	o	$x < 0$ y $x - 1 < 0$
$x > 0$ y $x > 1$	o	$x < 0$ y $x < 1$
$x > 1$	o	$x < 0$

La solución de esta inecuación se verifica en $(-\infty\ ; 0) \cup (1\ ; +\infty)$

Para la segunda inecuación se obtiene:

$x + 1 > 0$ y $x > 0$	o	$x + 1 < 0$ y $x < 0$
$x > -1$ y $x > 0$	o	$x < -1$ y $x < 0$
$x > 0$	o	$x < -1$

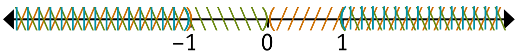
La solución de esta inecuación se verifica en $(-\infty\ ; -1) \cup (0\ ; +\infty)$

Para la tercera inecuación:

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ o } x < -1$$

La solución de esta inecuación se verifica en $(-\infty\ ; -1) \cup (1\ ; +\infty)$

Se buscan los valores de x que satisfagan las tres condiciones simultáneamente, es decir, la intersección entre las tres soluciones. Una recta numérica puede ayudar a hallarla:



Luego, el dominio de la función $f(x)$ es $\text{Dom}(f) = (-\infty\ , -1) \cup (1\ , +\infty)$.

Puede verse que el dominio de $g(x)$ está incluido en el de $f(x)$. Pero, para que las funciones sean iguales no alcanza con que sus fórmulas sean equivalentes. Es necesario que además tengan el mismo dominio.

Entonces, las funciones son iguales solo si se consideran los valores de x mayores que 1.

Las propiedades de los logaritmos no valen para cualquier valor, sino que tienen un dominio específico. Luego, será cierto que
$\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
$\log_a (m^p) = p \cdot \log_a n$
siempre que m y n sean números positivos.

Análisis de funciones logarítmicas

Problema 9

Determinar si existe alguna relación entre las funciones

$$f(x) = \log_3 x \qquad g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

Para analizar si existe alguna relación es necesario estudiar las dos funciones. Para ello, es posible hallar sus conjuntos de ceros, positividad y negatividad.

Para hallar los ceros de cada una es necesario resolver las siguientes ecuaciones:

$$\log_3 x = 0 \Leftrightarrow 3^0 = x \Leftrightarrow x = 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0 = x \Leftrightarrow x = 1$$

Ambas funciones valen cero cuando x es 1. Las dos pasan por el punto (1 ; 0).

Para hallar el conjunto de positividad de $f(x)$ es necesario buscar la solución de una inecuación: $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_3 x > 0$

Además $\log_3 x = f(x) \Leftrightarrow 3^{f(x)} = x$.

En el capítulo anterior se analizó que la función exponencial $h(t) = 3^t$

- toma siempre valores positivos;
- es una función creciente por tener base mayor que 1;
- toma valores entre 0 y 1 si el exponente es menor que 0;
- toma valores mayores que 1 cuando el exponente es mayor que 0.

Usando este razonamiento para analizar la igualdad $3^{f(x)} = x$, es posible decir que para que $f(x)$ sea negativo, x debe ser un número entre 0 y 1; y para que $f(x)$ sea positivo, x debe ser mayor que 1.

Luego, para la función $f(x)$, $C^+ = (1 ; +\infty)$ y $C^- = (0 ; 1)$.

Para la función $g(x)$ es preciso resolver la inecuación:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x > 0$$

Además $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{g(x)} = x$

En el capítulo anterior se analizó que la función exponencial $m(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^t$

- toma siempre valores positivos;
- es una función decreciente por tener base menor que 1;
- toma valores entre 0 y 1 si el exponente es mayor que 0;
- toma valores mayores que 1 cuando el exponente es menor que 0.

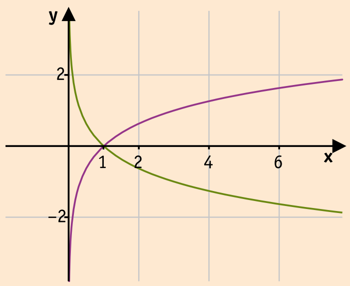
Si se analiza $g(x)$ se tiene que:

$$C^+ = (0 ; 1) \text{ y } C^- = (1 ; +\infty)$$

A partir de los datos anteriores se obtienen las siguientes gráficas:

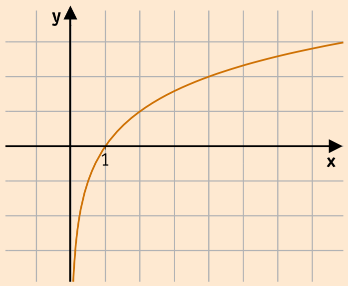
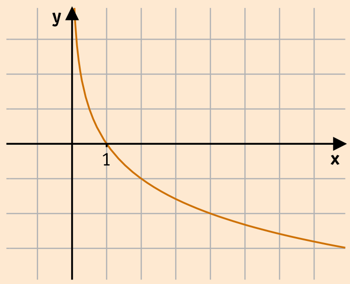
$f(x) = \log_3 x$

$g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



El análisis de las dos funciones logarítmicas, la de base 3 y la de base $\frac{1}{3}$, en el problema anterior, puede realizarse con cualquier base mayor que 1 y cualquier base positiva menor que 1.

Se llega entonces a las siguientes conclusiones para $f(x) = \log_a x$:

Si $a > 1$	**Si $0 < a < 1$**
$f(x)$ es creciente	$f(x)$ es decreciente
La recta $x = 0$ es asíntota vertical.	La recta $x = 0$ es asíntota vertical.
$C^+ = (1\,;+\infty)$	$C^+ = (0\,;1)$
$C^- = (0\,;1)$	$C^- = (1\,;+\infty)$
$C^0 = \{1\}$	$C^0 = \{1\}$
	

Problema 10

Determinar si para cualquier valor de a positivo y diferente de 1, las gráficas de las funciones $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ son simétricas respecto del eje x.

Por lo visto en el problema anterior, esto es cierto para 3 y $\frac{1}{3}$. *¿Por qué será así? ¿Valdrá solo para las bases* 3 y $\frac{1}{3}$?

Si a es un número positivo, distinto de 1, y x es positivo

$\log_a x = b$	$\Leftrightarrow$	$a^b = x$

Además,

$\log_{\frac{1}{a}} x = c$	$\Leftrightarrow$	$\left(\frac{1}{a}\right)^c = x$	$\Leftrightarrow$	$(a^{-1})^c = x$	$\Leftrightarrow$	$a^{-c} = x$

Por lo tanto:

$$a^b = a^{-c}$$

y esto solo se verifica cuando $b = -c$, es decir que los resultados de los logaritmos son opuestos entre sí:

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Como para un mismo valor del dominio, las imágenes a través de estas funciones son opuestas, sus gráficas son simétricas respecto del eje de abscisas.

Si $a > 1$, las funciones: $f(x) = \log_a x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ tienen gráficas simétricas respecto del eje de abscisas.

Problema 11

Hallar ceros, conjuntos de positividad y negatividad y dominio de las funciones:

$t(x) = \log_2 (2x - 1)$ $\quad h(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-4x)$ $\quad f(x) = \log_4 (3x + 1) - 2$

Para determinar el dominio de $t(x)$ es necesario tener en cuenta que el logaritmo se aplica solo a números positivos, por lo tanto:

$$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Se tiene que $\mathrm{Dom}(t) = (\frac{1}{2} ; +\infty)$

Sin hacer un gráfico de la función se puede saber que, como la base del logaritmo es mayor que 1, la función será creciente.

Además, para encontrar el cero es necesario resolver:

$$t(x) = \log_2 (2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2^0 = 2x - 1$$

Por lo tanto, $1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Luego $C^0 = \{1\}$.

Para hallar los conjuntos de positividad y negatividad puede realizarse lo siguiente:

$t(x) > 0$	$\Leftrightarrow$	$2x - 1 > 1$	$\Leftrightarrow$	$x > 1$
$t(x) < 0$	$\Leftrightarrow$	$0 < 2x - 1 < 1$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{2} < x < 1$

Luego $C^+ = (1 ; +\infty)$ y $C^- = (\frac{1}{2} ; 1)$.

Con una tabla de valores se podrán determinar otras particularidades del gráfico:

x	0,50001	0,5001	0,501	0,51	1	2	3	4
t(x)	–15,61	–12,29	–8,97	–5,64	0	1,585	2,32	2,81

Es decir, a medida que x se acerca a $\frac{1}{2}$, la función tiende a $-\infty$.

En consecuencia:

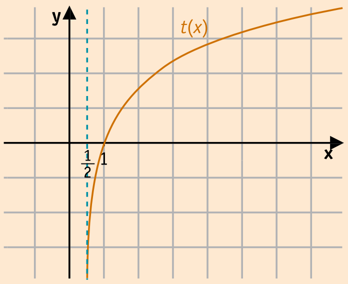
$\mathrm{Dom}(t) = (\frac{1}{2} ; +\infty)$

$C^0 = \{1\}$

$C^+ = (1 ; +\infty)$

$C^- = (\frac{1}{2} ; 1)$

$x = \frac{1}{2}$ es asíntota vertical de t.



Para estudiar el comportamiento de la función $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-4x)$ se puede proceder de manera similar al caso anterior.

Para analizar el dominio es necesario que la expresión a la que se le tomará logaritmo sea positiva, es decir:

$$-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

O sea, esta función está definida únicamente para los números reales menores que 0.

$$\mathrm{Dom}(h) = (-\infty ; 0)$$

La gráfica de $g(x) = \log_a(-x)$ es simétrica de $h(x) = \log_a x$ respecto del eje de ordenadas. Entonces si h crece, g decrece y si h decrece, g crece.
$g(x) = \log_a(-x)$ crece si $0 < a < 1$.
$g(x) = \log_a(-x)$ decrece si $a > 1$.

El *Corolario del Teorema de Bolzano* afirma que si para una función continua, x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas (no hay otras raíces entre ellas), entonces la función no cambia de signo entre x_1 y x_2.
$f(x)$ es toda positiva o toda negativa para los valores de x en el intervalo $(x_1 ; x_2)$.

Debido a esto, si se conocen las raíces de $f(x)$, alcanza con saber el signo de un solo elemento en cada intervalo que ellas determinan para saber el signo de la función en todo su dominio.

Para determinar el valor de x donde la función se hace 0 habrá que resolver la siguiente ecuación:

$$\log_{\frac{1}{3}}(-4x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0 = -4x \Leftrightarrow 1 = -4x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Es decir, $h(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{4}$. $C^0 = \{-\frac{1}{4}\}$.

El paso siguiente es determinar dónde es positiva y dónde negativa.

Como ya se ha visto, x solo puede tomar valores negativos, y en $x = -\frac{1}{4}$ la función se hace 0. Entonces, habrá que ver qué ocurre con los valores de x menores que $-\frac{1}{4}$ y con los que se encuentran entre $-\frac{1}{4}$ y 0.

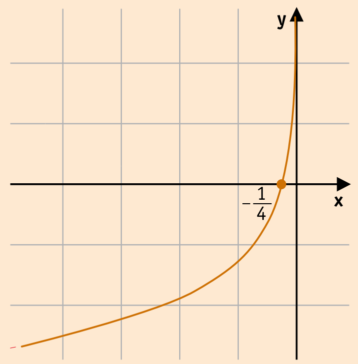
Pero $h(x)$ es una función que se puede dibujar sin levantar el lápiz de la hoja, es decir, es una función continua. Es posible aplicar para ella el corolario del Teorema de Bolzano. Esto permite afirmar que debe ocurrir una de las siguientes posibilidades:
en todos los valores de x menores que $-\frac{1}{4}$ es negativa o bien en todos los valores de x menores que $-\frac{1}{4}$ es positiva.

Por ejemplo, $h(-\frac{9}{4}) = \log_{\frac{1}{4}}(9) \approx -1{,}58$; la función es negativa, y es posible asegurar:

$h(x) < 0$	$h(x) = 0$	$h(x) > 0$
$x < -\frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4} < x < 0$

Su gráfico es aproximadamente:

Dom $(h) = (-\infty ; 0)$
$C^0 = \{-\frac{1}{4}\}$
$C^+ = (-\frac{1}{4} ; 0)$
$C^- = (-\infty ; -\frac{1}{4})$
$x = 0$ es asíntota vertical de h.



Es necesario estudiar ahora el comportamiento de la función:

$$f(x) = \log_4(3x + 1) - 2$$

En primer lugar hay que determinar para qué valores de x tiene sentido estudiar esta función, es decir, establecer su dominio. Para ello se deberá verificar que $3x + 1 > 0$,

$$3x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{3}$$

Luego,

$$\text{Dom}(f) = (-\frac{1}{3} ; +\infty)$$

Ya se sabe entonces que $x = -\frac{1}{3}$ es asíntota vertical de $f(x)$.

Para saber dónde la función se hace 0 habrá que resolver la siguiente ecuación:

$$\log_4 (3x + 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_4 (3x + 1) = 2 \underset{\text{por definición de logaritmo}}{\Leftrightarrow} 4^2 = 3x + 1$$

Entonces:

$$16 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = 5$$

Es decir, $f(5) = 0$. Con lo cual, $C^0 = \{5\}$.

Una vez más, se trata de determinar los valores de x para los cuales $f(x) > 0$ y aquellos donde $f(x) < 0$ a partir del dato de que en $x = 5$ la función corta al eje de las x.

Si se considera $x = 21$, es decir, un número mayor que 5, es posible establecer que $f(21) = \log_4 (64) - 2 = 1 > 0$, por lo tanto, para todos los valores de $x > 5$, $f(x) > 0$ y en los restantes valores del dominio, $(-\frac{1}{3}; 5)$, $f(x) < 0$.

Este mismo análisis puede hacerse apoyándose en lo que se sabe de las gráficas de las funciones logarítmicas. Si $f(x) = \log_a (cx + b)$ con $c > 0$ y la base es mayor que 1, la función es creciente. Es negativa hasta la raíz y positiva para los valores de x mayores que la raíz.

Esta información permite además saber que la función será creciente, y su gráfico será como el siguiente:

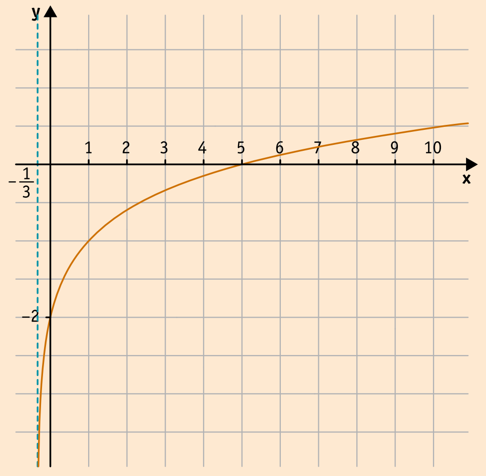
$\text{Dom}(f) = (-\frac{1}{3}; +\infty)$

$C^0 = \{5\}$

$C^- = (-\frac{1}{3}; 5)$

$C^- = (5; +\infty)$

$x = -\frac{1}{3}$ es asíntota vertical de f.



ACTIVIDADES

3. Realicen los gráficos de las siguientes funciones:

$f(x) = \log_2 x + 1$ $\quad h(x) = \log_2 (x - 1) + 2$

$g(x) = \log_3 (x + 4)$ $\quad t(x) = \log x - 1$

4. Hallen conjuntos de positividad, negatividad y ceros de las siguientes funciones:

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (-3x)$ $\quad h(x) = \log_3 (2x - 1)$

5. Encuentren un valor para k de manera tal que la función $t(x) = \log (kx)$ verifique la siguiente condición: $t(-\frac{1}{30}) = -1$

6. Tracen el gráfico de la función $m(x) = \log_2 (4x + 1) - 1$.

7. ¿Es cierto que las funciones $h(x) = \log \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^2$ y $j(x) = 2 \log \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$ son iguales?

8. ¿Cuáles son los valores de x para los que las funciones $f(x) = \log (x^2 - 4) - \log(x + 2)$ y $g(x) = \log (x - 2)$ sean iguales?

9. Hallen la fórmula de la función cuya gráfica es simétrica con respecto al eje x de $f(x) = \log_3(-x) + 1$. Grafiquen ambas en un mismo sistema de coordenadas.

10. ¿Cuáles son los valores de x para los cuales se verifica que $\log_2 (x^2 - x - 2) = \log_{\frac{1}{2}} [(x - 2) \cdot (x + 1)]$?

El logaritmo natural

En el capítulo anterior se ha presentado un número que posee ciertas características particulares y se lo ha designado con la letra *e*.

Es posible entonces considerar la función logarítmica que tenga por base dicho número:

$$f(x) = \log_e x$$

Al logaritmo con base *e* se lo denomina *logaritmo natural* o *logaritmo neperiano* y se lo escribe de la siguiente manera: $f(x) = \ln x$

Como se ha visto, el número *e* es irracional, por lo tanto tiene infinitas cifras decimales no periódicas,

$$e = 2{,}71828182284590452353602...$$

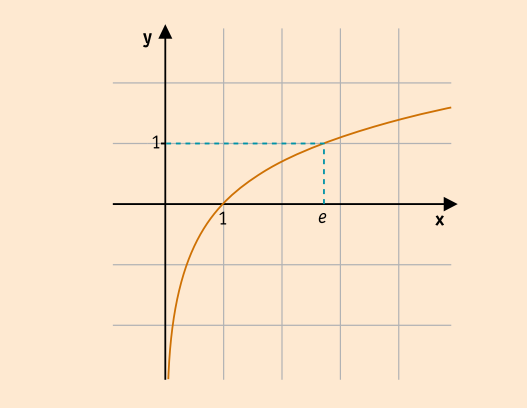
El logaritmo en base *e* se denomina **logaritmo natural** o **logaritmo neperiano** pues fue un matemático escocés de nombre John Neper (1550-1617) a quien se le atribuye haberlo descubierto.

La función $f(x) = \ln x$ tiene como dominio el conjunto de todos los números reales mayores que 0 y por imagen, todos los reales. Es decir:

$$Dom\,(f) = (0\,;+\infty)$$
$$Im\,(f) = \mathbb{R}$$

El siguiente será su gráfico construido a partir de una tabla de valores aproximados utilizando en la calculadora la tecla ln :

x	**ln *x***
1	0
2	0,69
3	1,09
$\frac{1}{2}$	– 0,69
$\frac{1}{5}$	–1,61



Como puede notarse, $\ln x = 0$ cuando $x = 1$ pues $e^0 = 1$. $C^0 = \{1\}$

Si se pretende saber para qué valor de *x* la función vale, por ejemplo, 3, será necesario resolver la siguiente ecuación:

$$f\,(x) = \ln x = 3$$

Para determinar el valor de *x* se puede recurrir a la definición de logaritmo. Por lo tanto:

$$\ln x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^3 = x$$

Un valor aproximado de e^3 se obtiene mediante el uso de la calculadora:

$$x \approx 20{,}09$$

Para calcular e^3 con calculadora se debe presionar, según el modelo:

3 e^x = o e^x 3 =

En general, la tecla e^x se encuentra sobre la tecla ln, por lo tanto para que funcione habrá que apretar previamente (según el modelo) la tecla INV o SHIFT o 2NDF.

Para estudiar el comportamiento de cualquier función que involucre el logaritmo natural, se puede recurrir a las mismas propiedades que se cumplen para todos los logaritmos.

Problema 12

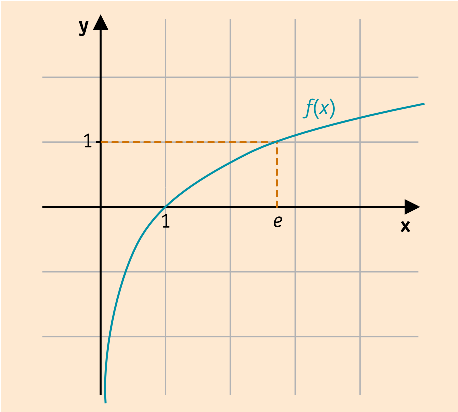
Determinar si los gráficos de las funciones *f(x)* y *g(x)* que se presentan a continuación coinciden.

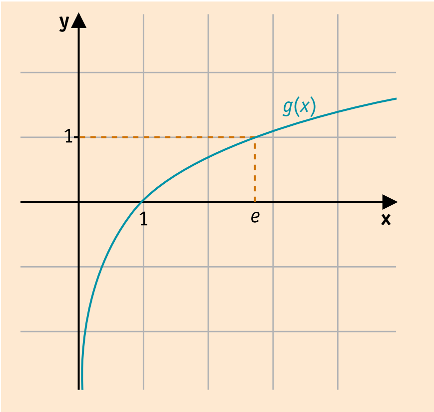
$$f:(0\,;+\infty) \to \mathbb{R}/\,f(x) = \ln x \qquad g:(0\,;+\infty) \to \mathbb{R}/g(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

En el siguiente cuadro se presentan las dos funciones propuestas por medio de una tabla de valores aproximados.

x	1	2	3,5	4	10	100	1000
$f(x)$	0	0,693	1,253	1,386	2,302	4,605	6,908
$g(x)$	0	0,693	1,253	1,386	2,302	4,605	6,908

A partir de los datos de la tabla, es posible sospechar que ambas funciones tendrán el mismo gráfico:





¿Será posible encontrar algunas razones que expliquen la igualdad de los gráficos, más allá de la tabla de valores?

El siguiente razonamiento resuelve la pregunta.

$g(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$	Por la propiedad $\ln a^b = b \cdot \ln a$. En este caso, $b = -1$ y $a = \frac{1}{x}$.
$g(x) = \ln x = f(x)$	Pues, $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x$.

Otra forma de demostrarlo es mediante este razonamiento:

$g(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -(\ln 1 - \ln x)$	Por la propiedad $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
$g(x) = -(0 - \ln x) = \ln x$	Pues $\ln 1 = 0$

Se observa que se han podido aplicar las propiedades de los logaritmos debido a que ambas funciones tienen el mismo dominio.

Relación entre función exponencial y función logarítmica

En el desarrollo del capítulo anterior y este, se han definido dos tipos de funciones, las exponenciales y las logarítmicas.

Si se hace referencia a las funciones exponenciales del tipo $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, su dominio es el conjunto de los números reales y la imagen son los números positivos.

Las funciones logarítmicas del tipo $g(x) = \log_a x$ tienen idénticas restricciones para a pero el dominio está formado por los números positivos y la imagen es el conjunto de los números reales.

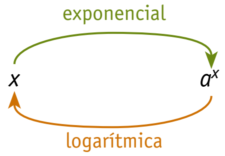
También se definió el logaritmo como:

$$g(x) = \log_a x \Leftrightarrow a^{g(x)} = \text{x}.$$

Ambas funciones están definidas a partir de una función exponencial. Solo cambian los datos de los que se parte y el resultado que se desea obtener.

En el caso de la función exponencial, se parte del valor del exponente y se quiere hallar el resultado de la potencia. En la función logarítmica se parte del resultado de la potencia y se quiere hallar el exponente que brinda ese resultado.

Es decir, que estas funciones hacen una el recorrido inverso de la otra:



Esto pareciera indicar que las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas entre sí.

Si $(x\ ;\ y)$ pertenece a la gráfica de f, entonces $a^x = y$, por lo tanto $\log_a y = x$, lo cual implica que el punto $(y\ ;\ x)$ pertenece a la gráfica de g.

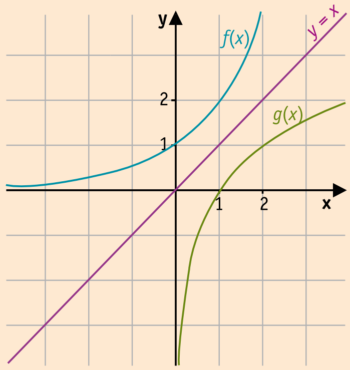
Por lo tanto, la función g "deshace" lo que hace la función f y viceversa. Son, entonces, funciones inversas entre sí.

Para cualquier función f y su función inversa f^{-1} se verifica que si el punto $(a\ ;b)$ pertenece a la gráfica de f, entonces el punto $(b\ ;a)$ pertenece a la gráfica de f^{-1}.

En el desarrollo anterior no se ha usado ninguna característica particular del número a, todo lo que se dedujo fue independiente de su valor. Por eso se puede afirmar que las funciones exponenciales y logarítmicas siempre son inversas entre sí.

Si se grafican ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas suponiendo $a > 1$ se puede ver que son gráficos simétricos respecto de la recta $y = x$.

$f(x) = a^x$
$g(x) = \log_a x$
$y = x$



Los gráficos de una función y su inversa son simétricos respecto de la recta $y = x$, bisectriz del primero y tercer cuadrante.

Problema 13

Graficar la función cuya fórmula es $f(x) = \log (0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x)$.

No es posible interpretar la función que se quiere graficar como un desplazamiento de la función $g(x) = \log x$, ya que su argumento es una función polinómica de grado 3. Entonces, para poder hacer una gráfica aproximada será necesario estudiar el comportamiento de esta función a partir de las características que se han desarrollado en este capítulo.

Para encontrar los ceros de de $f(x)$ hay que resolver la ecuación:

$$\log (0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x) = 0 \iff$$
$$0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x = 10^0 = 1 \iff$$
$$0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x - 1 = 0$$

La ecuación que resulta no puede resolverse a través de despejes ni a simple vista. Tampoco es posible aplicar el Lema de Gauss porque los coeficientes no son números enteros.

El Lema de Gauss afirma que si

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d$$

y sus coeficientes son números enteros, entonces las *posibles raíces racionales de f(x)* se obtienen a partir de todos los cocientes posibles entre los divisores de d y los divisores de a.

Sin embargo, es posible multiplicar ambos miembros de la ecuación por un número conveniente de manera tal que se obtenga otra ecuación equivalente con coeficientes enteros. En este caso, uno de los números posibles es 10:

$$0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x - 1 = 0$$
$$10 \cdot (0{,}1\, x^3 + 0{,}2\, x^2 - 0{,}3\, x - 1) = 0 \cdot 10$$
$$x^3 + 2\, x^2 - 3\, x - 10 = 0$$

En este caso, las posibles raíces racionales de la ecuación anterior son ± 1; ± 2 ; ± 5 ; ± 10.

Probando con cada una de ellas resulta que la única raíz racional es $x = 2$. Para analizar si existe alguna raíz que no sea racional se puede usar la regla de Ruffini para dividir el polinomio por $(x - 2)$ y así factorear la expresión del miembro izquierdo de la ecuación.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -3 & -10 \\ 2 & & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

Luego, $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = (x - 2)(x^2 + 4x + 5)$.

La expresión tendrá otras raíces, además de $x = 2$, si el factor cuadrático las tiene.

Sin embargo, el discriminante es $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, lo cual indica que $x = 2$ es la única raíz.

$$C^0 = \{2\}$$

Para calcular el *Dom* (f) se plantea:

$$0{,}1\,x^3 + 0{,}2\,x^2 - 0{,}3\,x > 0$$

$0{,}1\,x\,(x^2 + 2x - 3) > 0$	Se saca factor común $0{,}1x$.
$0{,}1\,x\,(x - 1)\,(x + 3) > 0$	Se factorea el término cuadrático que tiene raíces $x = 1$ y $x = -3$.

Se trata de hallar, entonces, el conjunto de positividad de la función $h(x) = 0{,}1x \cdot (x - 1)(x + 3)$, cuyas raíces son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -3$. Esto puede resolverse aplicando el corolario del teorema de Bolzano:

$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$h(-4) = -2$	$h(-1) = 0{,}4$	$h(0{,}5) = -0{,}0875$	$h(2) = 1$
$h(x) < 0$ si $x < -3$	$h(x) > 0$ si $-3 < x < 0$	$h(x) < 0$ si $0 < x < 1$	$h(x) > 0$ si $x > 1$

A partir de lo obtenido en la tabla, el dominio de la función es:

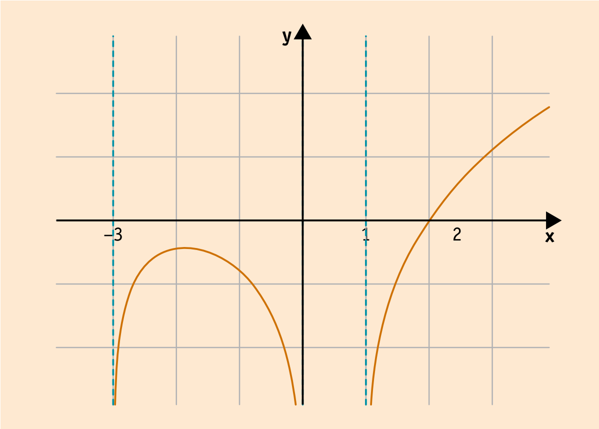
$$\text{Dom}(f) = (-3\,;\,0) \cup (1\,;\,+\infty)$$

Para completar el análisis es necesario analizar qué le sucede a la función en las cercanías de los "bordes" de los intervalos que definen el dominio.

A medida que x se acerca a cada uno de ellos, el argumento del logaritmo tiende a cero, lo que hace que el logaritmo tienda a $-\infty$. Entonces, la función tiene tres asíntotas verticales, $x = -3$, $x = 0$ y $x = 1$.

La gráfica, que puede completarse hallando algunas imágenes, es:

x	$f(x)$
$-2{,}5$	$-0{,}36$
-2	$-0{,}22$
-1	$-0{,}4$
$-0{,}5$	$-0{,}73$
$1{,}5$	$-0{,}47$
2	0
$2{,}5$	$0{,}31$
3	$0{,}56$



ACTIVIDADES

11. Grafiquen las siguientes funciones. Encuentren dominio, asíntotas, conjuntos de positividad y negatividad y ceros.

a. $f(x) = 2\log\,[(x-2)(x+2)]$

b. $g(x) = \log(2 - 3\,x^2 - 5x)$

c. $h(x) = \log_3(x^2 - 4x)$

d. $t(x) = \log(3 - 2x) + 1$

e. $m(x) = 2 \cdot 3^{x-1} - 6$

f. $n(x) = -3 \cdot \log_2(2x - 4)$

g. $b(x) = 2 \cdot \log_4(3x - 6)$

h. $l(x) = \log_4[(3x - 6)^2]$

i. $s(x) = \log_4(x - 1)$

j. $k(x) = \log_2[(x - 1)^2]$

Expresión de una función exponencial conociendo puntos de su gráfico

Problema 14

En un laboratorio se desarrolla un experimento con cierto tipo de bacterias. Cuando se inicia el ensayo se contabilizan 12 000 bacterias. Al cabo de 3 horas, la cantidad asciende a 20 736 bacterias. Si se sabe que el crecimiento responde a una función exponencial, ¿en qué momento habrá 89 161 bacterias?

Para pensar en este problema, una de las primeras cuestiones es considerar, tal como lo propone el enunciado, que el crecimiento de las bacterias no responde a un modelo proporcional o lineal. Es decir, hay que descartar la tentación de sospechar que al doble de tiempo, habrá el doble de bacterias, ya que el crecimiento es de tipo exponencial. Por lo tanto, la función tendrá una expresión como la siguiente:

$$f(t) = k \cdot a^t$$

donde t será el tiempo medido en horas desde que se inicia el experimento y $f(t)$ indicará la cantidad de bacterias.

Para comprender el proceso, es necesario determinar los valores de a y de k de modo tal que se verifiquen las condiciones propuestas en el experimento.

Como al iniciar el ensayo se contabilizaron 12 000 bacterias, es posible establecer que para $t = 0$, es decir, a las 0 horas de comenzado el experimento, había 12 000 bacterias. Esto permite plantear una primera condición: $f(0) = 12\,000$. Por lo tanto:

$$12\,000 = f(0) = k \cdot a^0 = k \Rightarrow k = 12\,000$$

Por otro lado, se debe cumplir una segunda condición: $f(3) = 20\,736$ pues en el enunciado se sostiene que al cabo de 3 horas la cantidad de bacterias es de 20 736. Entonces:

$$20\,736 = f(3) = k \cdot a^3 = 12\,000 \cdot a^3 \Rightarrow 20\,736 = 12\,000 \cdot a^3 \Rightarrow a^3 = 1{,}728 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1{,}728} = 1{,}2$$

Por lo tanto, la función que modeliza el problema es:

$$f(t) = 12\,000 \cdot 1{,}2^t$$

donde t es el tiempo, medido en horas, desde que comienza el experimento y $f(t)$ es la cantidad de bacterias a las t horas.

Para saber en que momento había 89 161 bacterias hay que resolver la ecuación

$$12\,000 \cdot 1{,}2^t = 89\,161$$

$1{,}2^t = 89\,161 : 12\,000 \approx 7{,}43$	Se despeja.
$\log 1{,}2^t = \log 7{,}43$	Se aplica logaritmo en ambos miembros.
$t \cdot \log 1{,}2 = \log 7{,}43$	Por la propiedad del logaritmo de una potencia.
$t = \dfrac{\log 7{,}43}{\log 1{,}2}$	Se despeja.
$t \approx 11$	Se resuelve utilizando una calculadora.

Si $a = b$ entonces
$\log_c a = \log_c b$
La base del logaritmo que se utiliza puede ser cualquiera. En el caso del problema se recurrió a logaritmo en base 10 para usar la calculadora.

Luego, al cabo de aproximadamente 11 horas habrá 89 161 bacterias.

Problema 15

Encontrar la expresión de una función exponencial, si se sabe que su gráfico contiene, entre otros a los puntos (2 ; 5,12) y (5 ; 167,78).

Como en el enunciado de este problema se expresa que la función que se busca es exponencial, la expresión de dicha función será : $f(x) = k \cdot a^x$ donde k y a son dos números reales, y $a > 0$ y distinto de 1.

Se trata entonces de encontrar qué valores debe asignarse a k y a de manera tal que la función cumpla con lo propuesto en el enunciado del problema.

Para ello, es posible plantear dos igualdades, que deberán cumplirse simultáneamente:

la función contiene al punto (2 ; 5,12)	$f(2) = 5{,}12$	$k \cdot a^2 = 5{,}12$
la función contiene al punto (5 ; 167,78)	$f(5) = 167{,}78$	$k \cdot a^5 = 167{,}78$

Queda planteado el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} k \cdot a^2 = 5{,}12 \\ k \cdot a^5 = 167{,}78 \end{cases}$$

¿Cómo encontrar a y k para que se cumplan las condiciones planteadas?

Una posibilidad es pensar en dividir las expresiones obtenidas, lo que equivale a plantear

$$a^3 \approx 32{,}77 \Rightarrow a = \sqrt[3]{32{,}77} \approx 3{,}2$$

Para determinar el valor de k será necesario reemplazar el valor encontrado de a en alguna de las dos ecuaciones.

Por ejemplo:

$$k \cdot a^2 = 5{,}12 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{5{,}12}{a^2} \approx \frac{5{,}12}{10{,}24} = 0{,}5$$

Finalmente, la función que se buscaba es

$$f(x) = 0{,}5 \cdot 3{,}2^x$$

Ecuaciones

Problema 16

En el problema inicial de este capítulo se presentó una fórmula que relaciona la sensación térmica en función de la humedad, si la temperatura es de 28° y la velocidad del viento es de 10 km/h: $ST(h) = 22{,}86.1{,}004^h$ donde h es el porcentaje de humedad (que deberá ser mayor o igual a 60%) y ST es la sensación térmica en grados centígrados.

a. ¿Cuál es la humedad si la sensación térmica es de 30,4°?

b. ¿Cuál es la humedad si la sensación térmica es de 28,5°?

Para responder a la primera pregunta es necesario plantear la ecuación:

$$30{,}4 = 22{,}86 \cdot 1{,}004^h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{30{,}4}{22{,}86} = 1{,}004^h \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}329833771 = 1{,}004^h$$

Una ecuación se llama exponencial cuando la variable se encuentra en el exponente.

Para hallar el valor de h es necesario resolver una ecuación exponencial donde h es la variable.

No resulta fácil hallar la solución a simple vista. A partir de lo trabajado en el problema 1, se sabe que el valor buscado de h está entre 70 y 80. Será necesario buscar alguna herramienta que permita determinar ese valor con mayor exactitud.

Por la definición de logaritmos:

$$1{,}004^h = 1{,}329833771 \;\Leftrightarrow\; \log_{1{,}004} 1{,}329833771 = h$$

El resultado del logaritmo es el valor buscado de h. Como su cálculo no puede hacerse mentalmente, puede aplicarse la fórmula de cambio de base:

$$h = \frac{\log 1{,}329833771}{\log 1{,}004} = 71{,}40591966$$

El resultado obtenido indica que en un día de 28° de temperatura con velocidad del viento de 10 km/h, la sensación térmica es de 30,4° si la humedad es de aproximadamente 71,4%.

Para la segunda pregunta el planteo es el mismo:

$$28{,}5 = 22{,}86 \cdot 1{,}004^h \quad \Leftrightarrow \quad \frac{28{,}5}{22{,}86} = 1{,}004^h \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}24671916 = 1{,}004^h \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_{1{,}004} 1{,}24671916 = h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{\log 1{,}24671916}{\log 1{,}004} = 55{,}2390416$$

Toda ecuación exponencial de la forma $a \cdot b^x = c$, con $b > 0$, $b \neq 1$ y a y c de igual signo, puede resolverse de la siguiente manera:

$$b^x = \frac{c}{a} \;\Leftrightarrow\; x = \log_b\left(\frac{c}{a}\right) \;\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{c}{a}\right)}{\log b}$$ si se aplica la fórmula de cambio de base.

El resultado determina que la humedad debe ser de 55,24%, pero ese no es un valor posible para h ya que el enunciado indicaba que la fórmula era válida si la humedad era superior a 60%.

Por lo tanto, en este contexto, la sensación térmica no puede ser de 28,5°.

ACTIVIDADES

12. Hallen el valor de x para el cual se verifica que $5^{-x} = 37$.

13. ¿Qué potencia de 3 es igual a 168?

14. Resuelvan la ecuación $456 \cdot 2{,}015^{3x} = 254$.

15. Dada la función $f(x) = -24 \cdot 4^{2x}$, hallen la preimagen de -1536. ¿Cuál es la preimagen de 1684?

Ecuaciones exponenciales

Problema 17

Hallar los valores de x que verifican la siguiente condición: $\frac{1}{2} \cdot 4^x \; - 2^{x-1} = 10$.

El primer inconveniente que surge cuando se intenta resolver esta ecuación es que no es posible agrupar 4^x con2^x. Entonces, será necesario hacer alguna transformación que permita agrupar estas potencias. Como 4 es una potencia de 2, la ecuación se puede transformar de la siguiente manera:

Algunas propiedades de las potencias:

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$
$$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$$
$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

$\frac{1}{2} \cdot 4^x \; - 2^{x-1} = 10$	Se plantea la ecuación.
$\frac{1}{2} \cdot (2^2)^x - 2^{x-1} = 10$	Se reemplaza 4 por 2^2.
$\frac{1}{2} \cdot 2^{2x} - \frac{2^x}{2^1} = 10$	Se utilizan propiedades de las potencias.
$\frac{1}{2} \cdot (2^x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^x - 10 = 0$	Se opera.
$\frac{1}{2} \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot A - 10 = 0$	Se reemplaza 2^x por A.

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ se puede resolver con la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales.

Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene una sola solución real.

Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales.

La expresión a la que se llegó es una ecuación cuadrática de variable A. Aplicando la fórmula para resolverla se obtendrán él o los valores posibles para A, de donde se podrán obtener el o los valores posibles para x.

$$A = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-10)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$$

Entonces:

$A = 5$	o	$A = -4$
$2^x = 5$	o	$2^x = -4$
$x = \log_2 5 \Leftrightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2{,}321928095$		Ninguna potencia de 2 puede dar negativa.

Al aplicar la fórmula para resolver la ecuación cuadrática no se hallan los valores de x, sino los de 2^x, que es la variable de la ecuación.

El resultado obtenido es solo un valor aproximado de la solución. No es posible expresarla de manera exacta a través de un número decimal. Por esto, una manera de dar la solución es diciendo que $x = \log_2 5$. El conjunto solución es entonces $S = \{\log_2 5\}$

Problema 18

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación: $2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x-1} = 4$

Una manera de comenzar a pensar la ecuación es buscar alguna relación entre los términos que la componen. En este caso, es posible observar que en cada uno de los términos del miembro de la izquierda aparece un "2^x", aunque también aparecen números sumados o restados. Se puede aplicar propiedades de los exponentes de igual base para poder operar con ellos.

$2^{x+3} + 2^{x+2} + 2^{x-1} = 4$	Se plantea la ecuación.
$2^x \cdot 2^3 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 4$	Se usan las propiedades de la potencia.
$8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 4$	Se resuelven las potencias de 2 posibles.
$\frac{25}{2} \cdot 2^x = 4$	Se saca factor común 2^x y se opera.
$2^x = \frac{8}{25}$	Se despeja y opera.

Como $\frac{8}{25}$ no es una potencia exacta de 2, solo es posible hallar el valor de x aplicando logaritmos:

$$x = \log_2\left(\frac{8}{25}\right) = \log_2 8 - \log_2 25 = 3 - \log_2 25$$

Todos los resultados anteriores corresponden a escrituras del mismo número. Todos son correctos. Incluso, tal vez interese hallar un resultado aproximado del valor de x, aplicando la fórmula del cambio de base. En dicho caso se tendría una aproximación del valor de $x \approx -1{,}6486$.

Entonces, el conjunto solución es: $S = \{\log_2\left(\frac{8}{25}\right)\} = \{3 - \log_2 25\}$.

Problema 19

Encontrar los valores de x que verifican la siguiente igualdad: $9^{(x^2-5)} = 3^{(4x+6)}$

En este caso, las bases de los exponentes no son las mismas, aunque se puede observar que 9 es una potencia de 3. Usando esto, la ecuación puede reescribirse como:

$$(3^2)^{(x^2-5)} = 3^{(4x+6)} \Leftrightarrow 3^{2x^2-10} = 3^{(4x+6)}$$

Como las funciones exponenciales son inyectivas, la única manera de obtener el mismo resultado en ambos miembros de la última expresión es si los exponentes son iguales. Luego,

$$2x^2 - 10 = 4x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 16 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas se obtiene que

$$x = 4 \text{ o } x = -2$$

Para verificar si los valores obtenidos son realmente soluciones de la ecuación pueden reemplazarse y verificar si la ecuación se transforma en una expresión verdadera:

Si una función $f(x)$ es inyectiva entonces $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Si $x = 4$	$9^{16-5} = 3^{4\cdot 4+6}$	$9^{11} = 3^{22}$	es verdadera	$x = 4$ es solución.
Si $x = -2$	$9^{4-5} = 3^{4\cdot(-2)+6}$	$9^{-1} = 3^{-2}$	es verdadera	$x = -2$ es solución.

El conjunto solución es $S = \{-2\ ;\ 4\}$

Ecuaciones logarítmicas

Si bien en las ecuaciones que se han resuelto hasta ahora han intervenido logaritmos, su característica era que la variable estaba en un exponente. Las ecuaciones que se desarrollarán en este apartado tienen al menos alguna de las variables afectadas por un logaritmo.

A través de algunos problemas se desarrollarán técnicas que permitan resolverlas.

Problema 20

Hallar los valores de x que verifican que $\log(x^2 - 15x) = 3$.

Esta ecuación se refiere a un logaritmo en base 10. De la ecuación puede obtenerse, aplicando la definición de logaritmo, que el exponente al que hay que elevar a 10 para obtener $x^2 - 15x$ es 3. Luego:

$$10^3 = x^2 - 15x \Leftrightarrow x^2 - 15x - 1000 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas se obtiene que

$$x = 40 \quad \text{o} \quad x = -25.$$

Como los valores obtenidos forman parte del argumento de un logaritmo es necesario verificar que estén en el dominio de definición de la expresión. Si no estuvieran, no serían solución de la ecuación.

Si $x = 40$	$\log(40^2 - 15 \cdot 40) = \log 1000 = 3$	$x = 40$ es solución.
Si $x = -25$	$\log((-25)^2 - 15 \cdot (-25)) = \log 1000 = 3$	$x = -25$ es solución.

El conjunto solución es S = {40 ; −25}.

Problema 21

Hallar el conjunto solución de la ecuación $2^{\log x} = 16$.

En principio, surgen dos maneras diferentes de resolver la ecuación.

Una forma consiste en darse cuenta de que 16 es una potencia de 2, entonces,

$$2^{\log x} = 2^4$$

Como ya se ha señalado, solo es posible que dos potencias de 2 sean iguales cuando los exponentes lo son. Por lo tanto:

$$2^{\log x} = 16 \Leftrightarrow 2^{\log x} = 2^4 \Leftrightarrow \log x = 4 \Leftrightarrow x = 10^4 \Leftrightarrow x = 10\,000$$

Otra manera de encarar la resolución es de una manera similar a cómo se resolvieron las ecuaciones exponenciales.

Si dos valores son iguales, también lo son sus logaritmos. Es decir, si $a = b$ entonces $\log a = \log b$, siempre que $a > 0$ y $b > 0$.

$2^{\log x} = 16$	Se plantea la ecuación.
$\log(2^{\log x}) = \log(2^4)$	Se aplica logaritmo en ambos miembros.
$\log x \cdot \log 2 = 4 \cdot \log 2$	Se aplica la propiedad del logaritmo de la potencia.
$\log x = \dfrac{4 \cdot \log 2}{\log 2} = 4$	Se despeja $\log x$.
$x = 10^4 = 10\,000$	Se usa la definición de logaritmo.

El conjunto solución es S = {10 000}

Problema 22

¿Existe algún punto de intersección entre las gráficas de las funciones $g(x) = \log(2x + 2)$ y $f(x) = \log(2x + 8) - \log x$?

El punto de intersección de dos funciones es aquel que pertenece a ambas gráficas. Por lo tanto, para ese valor de x se obtiene la misma imagen a través de las dos funciones.

Para determinar si las funciones se intersecan es necesario buscar si existe un mismo valor de x para el cual las imágenes por ambas funciones sean iguales. Por lo tanto, se busca algún x para el cual $f(x) = g(x)$, es decir:

$\log(2x+8) - \log x = \log(2x+2)$	Se reemplaza f y g por sus fórmulas.
$\log\left(\frac{2x+8}{x}\right) = \log(2x+2)$	Por propiedad de la resta de los logaritmos.
$\frac{2x+8}{x} = 2x+2$	Si dos logaritmos son iguales los argumentos deben serlo.
$2x+8 = (2x+2)\cdot x$	Se opera.
$2x+8 = 2x^2 + 2x$	Se aplica la propiedad distributiva.
$8 = 2x^2$	Se despeja.
$4 = x^2 \Leftrightarrow x = 2$ o $x = -2$	Se resuelve la ecuación cuadrática.

Si $\log a = \log b$, entonces $a = b$.

Para que los valores obtenidos sean efectivamente las abscisas de los puntos de intersección de ambas funciones deben estar en el dominio de ambas. Una manera de verificarlo es viendo si tienen imagen a través de cada una de las funciones.

$$f(2) = \log(2\cdot 2 + 8) - \log 2 = \log 12 - \log 2 = \log\frac{12}{2} = \log 6$$
$$g(2) = \log(2\cdot 2 + 2) = \log 6$$

A partir de esto es posible afirmar que un punto de intersección entre estas funciones es $(2\ ;\ \log 6)$.

Para completar el análisis es necesario realizar los mismos cálculos con la otra solución obtenida.

$$f(-2) = \log(2\cdot(-2) + 8) - \log(-2)$$

Como $\log(-2)$ no existe, -2 no pertenece al dominio de la función $f(x)$, con lo cual no puede ser un punto de intersección entre estas funciones.

Entonces, el único punto de intersección es $(2\ ;\ \log 6)$.

¿Siempre es necesario verificar si los valores obtenidos son realmente soluciones de los problemas planteados?

Hay algunas funciones cuyos dominios no son todo el conjunto de números reales, sino una parte del mismo. En esos casos, es frecuente que al plantear alguna ecuación que las involucren no se tenga en cuenta la restricción del dominio. Por eso, una vez resuelta la ecuación, es necesario verificar si realmente los valores obtenidos son soluciones.

Sin embargo, podría comenzarse por buscar el dominio y luego solo verificar si los valores obtenidos pertenecen o no a él.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

16. Grafiquen las siguientes funciones. Indiquen las ecuaciones de sus asíntotas y sus ceros.

a. $f(x) = 3^{-x} - 2$

b. $g(x) = -3 \cdot 2^{x+1} + 1$

c. $h(x) = 4 \cdot 5^{x-2} - 3$

d. $k(x) = -3^{1-x} + 2$

e. $f(x) = 2 \log_3 (-x + 1) - 4$

f. $g(x) = 3 \log_{\frac{1}{4}} (x - 2) + 1$

17. Expliquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. $-7 = 4 - 5 \log_3 3^x \Rightarrow -7 = 4 - 5x$

b. $-7 = 4 - 5 \log_3 2^x \Rightarrow -7 = 4 - 5x$

c. $-7 = 4 - 5 \log_3 2^x \Rightarrow -7 = 4 - 5x \cdot \log_3 2$

d. $3 = \log_2(5 \cdot 2x) \Rightarrow 3 = x \log_2(5 \cdot 2)$

e. $3 = \log_2(5 \cdot 2^x) \Rightarrow 3 = \log_2 5 + \log_2 2^x$

f. $2 = \log_7(\frac{5}{x}) \Rightarrow 2 = \dfrac{\log_7 5}{\log_7 x}$

g. $2 = 4 \log_7(\frac{5}{x}) \Rightarrow 2 = 4 \cdot (\log_7 5 - \log_7 x)$

18. Decidan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $2 \log 3 + \log\left(\frac{1}{3}\right) + \log 27 = \log 81$

b. Si a y b son números positivos, entonces
$\log\left(\frac{a^4}{b}\right) = 2 \log a - 3 \log b + 2 \log (ab)$

c. Si a y b son números positivos, entonces $\log a - \frac{1}{2} \log b = \log \sqrt{\frac{a^2}{b}}$.

19. Expresen como un solo logaritmo.

a. $\log 5 + 2 \log 20 - \frac{3}{2} \log 100$

b. $\log\left(\frac{7}{2}\right) - \log 28 + \log 8$

20. Calculen, aproximadamente, los siguientes logaritmos usando la calculadora.

a. $\log_{0,75} 4$ **b.** $\log_{0,5} 0,35$

c. $\log_{0,49} 0,343$ **d.** $\log_2 5$

21. Sin utilizar calculadora, hallen el resultado de cada uno de los siguientes logaritmos:

a. $\log_3 \left| \dfrac{\sqrt[3]{9} \cdot \frac{1}{81}}{\frac{1}{\sqrt[5]{729}}} \right|$ **b.** $\log_8 \left| \dfrac{4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{16}{\sqrt[5]{64}}} \right|$

22. Encuentren los valores de x que verifican las siguientes condiciones:

a. $191 = \dfrac{3^x}{9,72} - 416$ **b.** $3^{(x+1)} = 26 \cdot 2^{-x}$

c. $3 \cdot 2^{\frac{(x-2)}{7}} - 35 = 1501$ **d.** $21 \cdot 2^{(x+1)} \cdot 3^{(1-x)} = 56$

23. Encuentren el conjunto solución de cada ecuación.

a. $\log_5 x + \log_5 (x + 2) = \log_5 (x + 6)$

b. $\log(x + 6) + 1 = 2\log(3x - 2)$

c. $\frac{1}{2}\log(x + 3) + \log 2 = 1$

d. $4e^{-7x} = 15$

e. $1 + 2e^x = 9$

f. $\dfrac{10^x - 4}{10^{2x}} = 1$

g. $(\ln x)^2 = \ln x^2$

h. $2^{3x} + 4 \cdot 2^{-3x} = 5$

i. $e^{2x} . e^{3x} - 3 = 2$

j. $\ln (x^2 - 1) - \ln (x - 1) = \ln (4)$

k. $\ln (x + 1) - \ln (x) = 2$

l. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

m. $e^{2x} = e^{6-x}$

n. $\log_3 (x^2) - \log_3 (3x + 2) = 0$

o. $\log_3 (5x + 7) = 2$

p. $e^{2x} - 4e^x - 21 = 0$

q. $4(10^x) - 7 = 95$

r. $e^{5x-1} = 20$

24. Hallen los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a. $5^{3x} - 5^{2x-2} - 5^{x+2} + 1 = 0$

b. $64^x - 12 = 512 \cdot 16^{x-2} - 16 \cdot 4^{x-2}$

c. $27^x + 13 . 3^{x+1} = 13 \cdot 9^x + 27$

d. $27^x - 3 \cdot 9^x = -4$

25. Si se hace un depósito de $\$C$ con un interés continuo de i% durante t años, la cantidad de dinero que habrá en la cuenta luego de ese lapso, si no se realizan extracciones, es $g(t) = C \cdot e^{it}$.
¿A qué interés habrá que depositar $2000 para que al cabo de 4 años haya $3500 en la cuenta?

26. Si se depositan $C a un interés compuesto mensualmente con una tasa del i% anual, la cantidad de dinero que se tendrá luego de t meses es $f(t) = C \cdot \left(1 + \dfrac{i}{100 . 12}\right)^{12t}$.
Si la cantidad de dinero inicial en una cuenta era de $200, ¿cuánto tiempo deberá pasar para que con un interés del 12% anual se consigan $500, asumiendo que no se realizan extracciones?

27. Un censo determinó que la ciudad **A** tenía una población de 30 000 000 y la ciudad **B** de 17 000 000. Sin embargo, la población de **A** crecía a razón de 1,3% anual, mientras que la población de **B** lo hacía a 2% anual. La función que modeliza el crecimiento de la población es $P(t) = P_0 \cdot e^{\frac{r}{100} \cdot t}$, donde P_0 es la población inicial, r es el porcentaje de crecimiento anual y t el tiempo transcurrido. ¿Habrá algún momento en que las poblaciones de las ciudades **A** y **B** sean iguales?

AUTOEVALUACIÓN

Seleccionen las respuestas correctas.

1. Las soluciones de la ecuación $\ln(x) = 2$ son:

- **a** $x = 2$
- **b** $x = 2^e$
- **c** $x = 1$ y $x = 0$
- **d** no tiene solución.
- **e** $x = e^2$

2. El conjunto solución de la ecuación $e^x = 6$ es:

- **a** $\{6\}$
- **b** $\{\frac{6}{e}\}$
- **c** $\{\ln(6)\}$
- **d** $\{e^6\}$
- **e** $\emptyset$

3. Las soluciones de la ecuación $\log(x) + \log(2) = 3$ son:

- **a** no tiene solución
- **b** $x = 500$
- **c** $x = \frac{1000}{\log 2}$
- **d** $x = \frac{3^{10}}{2}$
- **e** $x = \frac{3}{\log 2}$

4. Los valores de x que satisfacen la ecuación $10^{3x} = -1$ son:

- **a** no hay ningún valor que la satisfaga .
- **b** $x = \frac{\log(-1)}{3}$
- **c** $x = \frac{-1}{\log 3}$
- **d** $x = 0$
- **e** $x = 0{,}1$ y $x = 3$

5. El conjunto solución de la ecuación $\ln(x+1) + \ln(x) = \ln(2)$ es:

- **a** $S = \{1 ; -2\}$
- **b** $S = \{0 ; \ln(-2)\}$
- **c** $S = \{e ; e^2\}$
- **d** $S = \{-2\}$
- **e** $S = \{1\}$

6. La función exponencial que pasa por los puntos (2 ; 25,35) y (–1 ; 0,092) es:

- **a** $f(x) = 0{,}6 \cdot 6^x$
- **b** $f(x) = 0{,}6 \cdot 6{,}5^x$
- **c** $f(x) = 6{,}5 \cdot 0{,}6^x$
- **d** $f(x) = 3{,}9^x$

7. El dominio de la función $f(x) = \log(x^3 - 3x^2 - x + 3)$ es:

- **a** $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1 ; 1 ; 3\}$
- **b** $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty ; -1) \cup (3 ; +\infty)$
- **c** $\mathrm{Dom}(f) = (-1 ; 1) \cup (3 ; +\infty)$
- **d** $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty ; -1) \cup (1 ; 3)$

8. Las asíntotas de la función $f(x) = \log(x^3 - 3x^2 - x + 3)$ son:

- **a** $x = -1 ; x = 1 ; x = 3$
- **b** $x = 1 ; x = 3 ; y = 0$
- **c** $x = 1 ; x = -1$
- **d** $x = 1 ; x = 3 ; x = 0$

9. La igualdad $\log(1 - x) + \log(1 + x) = \log(1 - x^2)$ se verifica para los valores de *x* que se encuentran en los siguientes intervalos:

- **a** $(-\infty ; -1) \cup (1 ; +\infty)$
- **b** $(-1 ; 1)$
- **c** $(-\infty ; 1)$
- **d** nunca se verifica.