CONTENIDOS

- Los números imaginarios
- Los números complejos
- Operaciones con números complejos
- Módulo de un número complejo
- Resolución de ecuaciones

A lo largo de este libro se han resuelto diferentes ecuaciones y se encontraron soluciones dentro de distintos campos numéricos como los números naturales, los enteros, los racionales y los reales. Se analizaron también situaciones que se podían resolver con enteros, pero no con naturales, o con racionales pero no con enteros, etc. Hay situaciones que aún no pueden resolverse dentro del conjunto de los números reales, como por ejemplo, buscar soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, o encontrar un número que elevado al cuadrado de un resultado negativo, entre otros.
Para dar respuesta a estas situaciones es necesario conocer un nuevo conjunto numérico: el de los números complejos.

NÚMEROS COMPLEJOS

Problema 1

En un examen se proponen los siguientes interrogantes:

a. ¿Existe un número que elevado al cuadrado de por resultado -1?
b. La gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4$, ¿intersecta al eje x?
c. ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $x^2 + 4 = 0$?

Cuando se traduce el interrogante **a.** a lenguaje simbólico queda planteada la ecuación:

$$x^2 = -1$$

Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales dado que, si se considera cualquier número real x, y se lo eleva al cuadrado, se multiplican dos números del mismo signo por lo que el resultado será siempre positivo o cero.

Es decir, no hay ningún número real que elevado al cuadrado dé por resultado -1.

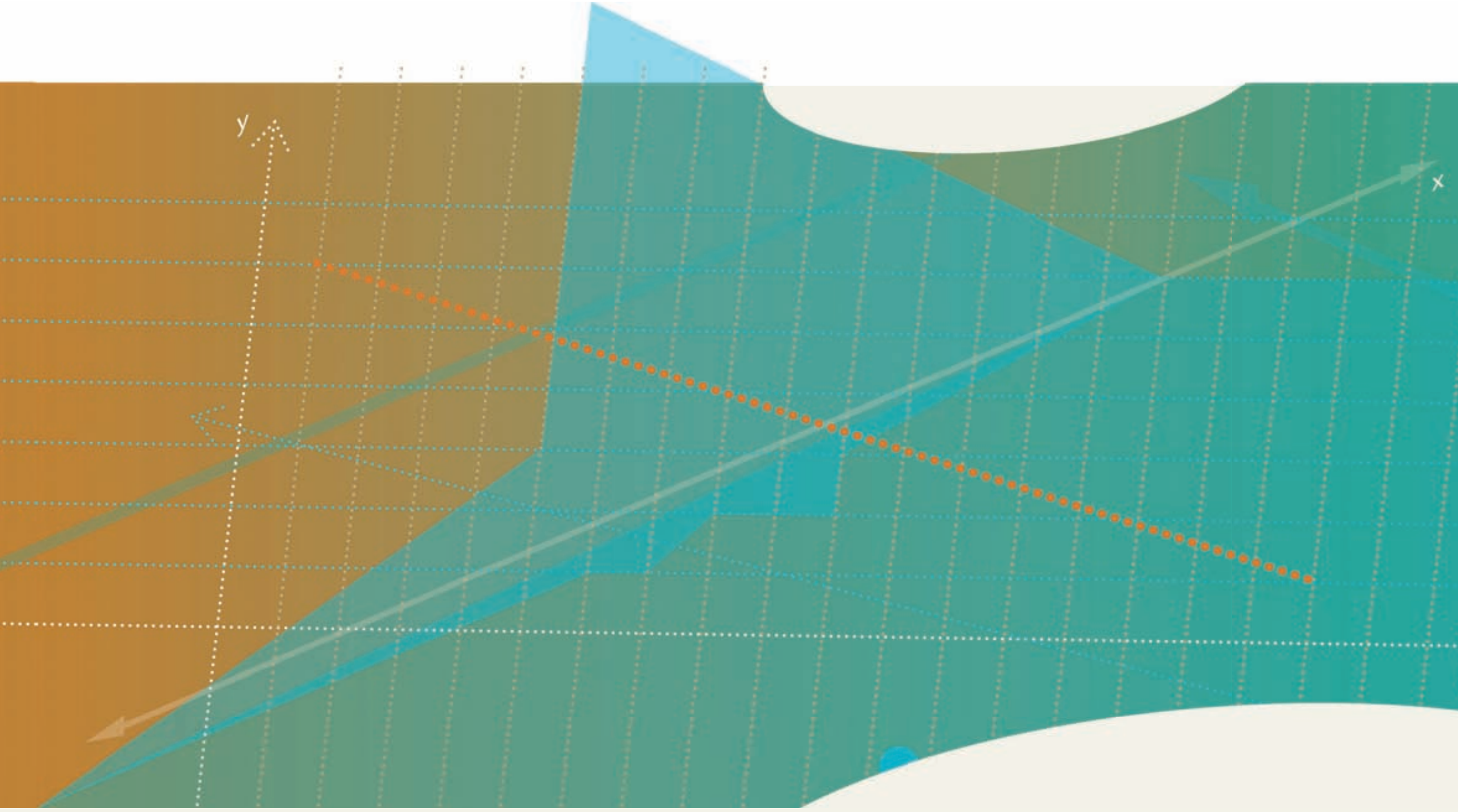
Para que la ecuación $x^2 = -1$ tenga solución, se asignó el símbolo i al número que elevado al cuadrado da por resultado -1. Es decir: $i^2 = -1$.

Claramente, éste no es un número real, ya que ninguno de ellos verifica que su cuadrado es un número negativo.

Con la incorporación de este nuevo número, la ecuación pasa a tener dos soluciones:

$$x = i \text{ y } x = -i$$

dado que $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = (-i) \cdot (-i) = i^2 = -1$.



Para responder el inciso **b.** hay que analizar la parábola de ecuación $f(x) = x^2 + 4$. Como $a > 0$, la gráfica es una parábola con sus ramas hacia arriba, y su vértice $(0 ; 4)$ es un punto mínimo. Esto indica que nunca cortará al eje x. Es decir que la función no tiene raíces reales.

La explicación del inciso **b.** permite responder parte del inciso **c.**, dado que al intentar resolver la ecuación $f(x) = 0$ no se encuentra ningún número real x que la verifique. Es decir, $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Este resultado se podría explicar también de la siguiente manera:

$$x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4$$

y no hay ningún número real que elevado al cuadrado dé -4.

Pero, si se considera el número $2i$, se tiene que:

$$(2i)^2 + 4 = (2i) \cdot (2i) + 4 = (2 \cdot 2) \cdot (i \cdot i) + 4 = 4 \cdot i^2 + 4 = 4 \cdot (-1) + 4 = -4 + 4 = 0$$

Entonces, $2i$ es una solución de la ecuación y el número $-2i$ también es solución porque:

$$(-2i)^2 + 4 = (-2)^2 \cdot i^2 + 4 = 4 \cdot (-1) + 4 = -4 + 4 = 0$$

Los números $2i$ y $-2i$ se llaman números imaginarios puros.

Los números imaginarios pertenecen a un conjunto de números más amplio que el de los números reales y permiten resolver, además de ecuaciones como la anterior, otras que se tratarán más adelante.

Se asignó el símbolo i para llamar a un número que elevado al cuadrado da por resultado -1. Es decir: $i^2 = -1$.

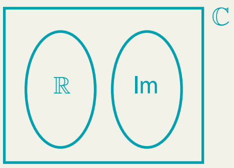
Se llama **números imaginarios puros** a los que pueden escribirse de la forma $b \cdot i$ (con $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$).

El conjunto de los números complejos

Para ampliar el campo numérico es necesario encontrar un conjunto que incluya los números imaginarios y los números reales.

Se denomina conjunto de **números complejos** al conjunto formado por todos los números z que se escriben como $z = a + b \cdot i$, siendo a y b dos números reales.
Todo número real a, puede escribirse como $a + 0i$, con lo cual es un número complejo.

Todo número imaginario puro bi, puede escribirse como $0 + bi$, es decir es un número complejo.
Los números complejos pueden representarse en el siguiente diagrama:



Se define entonces, el conjunto de los números complejos está formado por aquellos números que se escriben como $z = a + b \cdot i$, siendo a y b dos números reales. El conjunto de los números complejos se simboliza $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \;/\; a,\, b \in \mathbb{R}\}$$

Por ejemplo: $5 + 3i$; $-9 + 4\,i$; $\frac{1}{2} - 3i$; $14{,}2 - i$; 45 ; $-\frac{2}{3}$; $7i$ son números complejos.

Un número complejo tiene dos partes:
Una *parte real* (a) que se simboliza $Re(z)$ y una *parte imaginaria* (b) que se simboliza $Im(z)$.
Por ejemplo:
$Re\,(-8 + i) = -8$, $Im\,(-8 + i) = 1$; $Re\,(5 + 4i) = 5$, $Im\,(5 + 4i) = 4$

Ya se ha visto que los números reales completan la recta numérica.

¿Dónde se ubicarán los complejos? ¿Cómo se podrá representarlos?

Los números complejos se ubican en el plano, al que se denomina plano complejo. Cada número complejo $z = a + bi$ está identificado con un punto $P = (a\,;\,b)$ del plano.

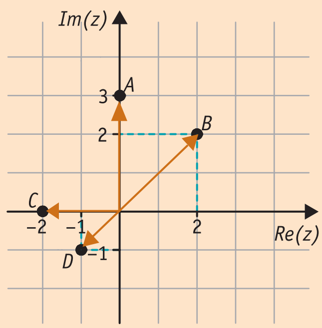
La parte real se ubica sobre el eje horizontal que se llama *eje real* y la parte imaginaria sobre el eje vertical, llamado *eje imaginario*.

La expresión de un número complejo como $z = a + b \cdot i = Re\,(z) + Im(z) \cdot i$ (con a y b números reales) se llama **forma binómica de un número complejo**.

Problema 2

Representar en el plano complejo los números $A = 3i$, $B = 2 + 2i$, $C = -2$ y $D = -1 - i$.

El número $A = 3i$ tiene por parte real a $a = 0$ y por parte imaginaria a $b = 3$. Se identifica en el plano con el punto $(0\,;\,3)$. De igual modo que con A, B se identifica con el punto $(2\,;\,2)$, C con $(-2\,;\,0)$ y D con $(-1\,;\,-1)$



Como los números complejos están identificados con puntos del plano, en ellos no hay orden; esto es, no puede decirse que un número complejo sea mayor o menor que otro. Solo puede decirse que dos complejos son iguales cuando tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria. En caso contrario, son distintos. Tampoco puede decirse si los números complejos son positivos o negativos porque no pueden compararse con el 0. Por ejemplo, $3 + 4i$ no es mayor ni menor que $5 - 6i$, aunque sí es distinto.

Dos números complejos son **iguales** cuando tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

Operaciones con números complejos

No resulta difícil operar con números complejos. El siguiente problema muestra una manera de efectuar cada operación.

Problema 3

Dados los números $z = 1 - 5i$ y $w = 4 + 3i$. Encontrar los resultados de las siguientes operaciones:

a. $z + w$ **b.** $z - w$ **c.** $z \cdot w$

Para resolver las operaciones es posible realizar lo siguiente:

$z + w = (1 - 5i) + (4 + 3i) =$	Se reemplaza z y w por su forma binómica.
$z + w = (1+4) + (-5i+3i) =$	Se agrupa la parte real de uno con la parte real del otro y la imaginaria con la imaginaria.
$z + w = (1+4) + (-5+3)i =$	Se saca factor común i.
$z + w = 5 - 2i$	Se resuelven las operaciones.

$z - w = (1 - 5i) - (4 + 3i) = 1 - 5i - 4 - 3i = (1 - 4) + (-5i - 3i) = -3 + (-8i) = -3 - 8i$

$z \cdot w = (1 - 5i) \cdot (4 + 3i)$	Se reemplaza z y w por su forma binómica.
$z \cdot w = 4 + 3i - 20i - 15i^2$	Se aplica la propiedad distributiva.
$z \cdot w = 4 + 3i - 20i + 15$	Se reemplaza i^2 por -1.
$z \cdot w = (4 + 15) + (3i - 20i)$	Se agrupa la parte real de uno con la parte real del otro y la imaginaria con la imaginaria.
$z \cdot w = (4 + 15) + (3 - 20)i$	Se saca factor común i.
$z \cdot w = 19 - 17i$	Se resuelven las operaciones.

Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$ quedan definidas las operaciones:

Suma y resta:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Multiplicación:

$$z \cdot w = (a+bi) \cdot (c+di) = ac + adi + cbi + bd\,i^2 = ac + adi + cbi + bd\,(-1) = ac + adi + cbi - bd = (ac - bd) + (ad + cb)\,i$$

Problema 4

Dado el número complejo $z = 5 - 3i$,

a. Encontrar un número w que verifique que $z + w = 0$.

b. ¿Cuál es el número v, que sumado a z da 10 como resultado?

c. Calcular la multiplicación de z por v.

Si se considera el número w como $w = Re\,(w) + Im\,(w)\,i$:

$$z + w = 0 \Leftrightarrow (5 - 3i) + Re\,(w) + Im\,(w)\,i = 0 + 0i \Leftrightarrow (5 + Re\,(w)) + (-3 + \mathrm{Im}\,(w))i = 0 + 0i \Leftrightarrow$$

$$5 + Re\,(w) = 0 \quad \text{y} \quad -3 + Im\,(w) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Re\,(w) = -5 \quad \text{y} \quad Im\,(w) = 3$$

Entonces, el número que sumado a z da 0 es $w = -5 + 3i$.

Como $z + w = 0$, w se llama opuesto de z y se anota $-z$.

Si $v = Re(v) + Im(v)\, i$;

$$z + v = (5 - 3i) + (Re(v) + Im(v)\, i) = (5 + Re(v)) + (-3 + Im(v))\, i = 10 + 0i$$

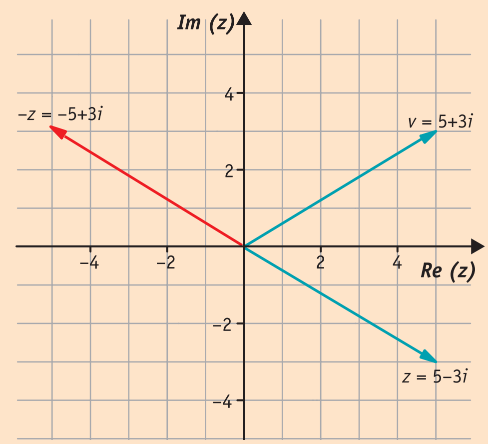
Por lo tanto:

$$5 + Re(v) = 10 \quad \text{y} \quad -3 + Im(v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Re(v) = 5 \;\text{ y }\; Im(v) = 3$$

El número buscado es $v = 5 + 3i$.

Si se grafica z, $-z$ y v en el plano, se observa que:

los números obtenidos están ubicados de una manera particular en el plano. El número $-z$ es simétrico de z respecto del origen de coordenadas, mientras que v es simétrico de z respecto del eje horizontal o real.



Estas particularidades observadas se verifican en todos los casos porque:

Si $z = a + bi$, entonces:

- $-z = -a - bi$, luego $z + (-z) = 0$ y $-z$ es simétrico a z respecto al origen de coordenadas.
- $v = a - bi$, con lo cual $z + v = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (bi - bi) = 2a$ y $a - bi$ es simétrico de z respecto del eje real; v se llama conjugado de z y se anota $\bar{z}$.

Dado $z = a + bi$ entonces

$-z = -a - bi$

es el opuesto de z y

$\bar{z} = a - bi$

es el conjugado de z.

Siempre se verifica que

$z + (-z) = 0$

$z + \bar{z} = 2\, Re(z)$

Por ejemplo:

$z = -2 + 5i$	$\Rightarrow$	$-z = 2 - 5i$ y $\bar{z} = -2 - 5i$
$z = -8i$	$\Rightarrow$	$-z = 8i$ y $\bar{z} = 8i$
$z = 9$	$\Rightarrow$	$-z = -9$ y $\bar{z} = 9$

Cuando se realiza la multiplicación $z \cdot v$

$$z \cdot v = (5 - 3i) \cdot (5 + 3i) = (5 \cdot 5 - (-3) \cdot 3) + (5 \cdot 3 + (-3) \cdot 5)i = (25 + 9) + 0i = 34$$

Es decir que la multiplicación de z por su conjugado dio por resultado un número real.

Si $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$, entonces:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$$

Es decir que $z \cdot \bar{z}$ siempre da por resultado un número real.

Problema 5

a. Calcular la división: $\dfrac{9 - 3i}{3}$

b. Encontrar un número w, que multiplicado por $z = 3 - i$ dé por resultado 1.

c. Buscar el resultado de la división: $\dfrac{1 - 5i}{4 + 3i}$.

d. Hallar, si existe, un número z que verifique $i \,.\, z + 1 = 2z$.

Para resolver la operación planteada en **a.** hay que dividir un número complejo por un número real y es posible entonces aplicar la propiedad distributiva. Luego:

$$\frac{9-3i}{3}=\frac{9}{3}-\frac{3}{3}i=3-i$$

En la situación **b.** se debe resolver la ecuación $(3-i)\cdot w=1$, por lo cual $w=\frac{1}{3-i}$. Si bien éste podría considerarse el resultado, como es un número complejo se podría escribir en su forma binómica. Entonces:

$w=\frac{1.(3+i)}{(3-i).(3+i)}$	Como la multiplicación de un número complejo por su conjugado da por resultado un número real, se multiplica numerador y denominador por el conjugado de $3-i$.
$w=\frac{3+i}{9-i^2}=\frac{3+i}{10}$	Se aplica la propiedad distributiva en el denominador y se agrupan términos.
$w=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$	Se realiza la división por un número real.

Podría comprobarse lo obtenido viendo si $(3-i)\cdot(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i)$ da 1.
El número $w=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$ es el inverso de $z=3-i$, y se anota z^{-1}. Es decir:

$$z^{-1}=(3-i)^{-1}=\frac{1}{3-i}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

Se llama **inverso** de un número complejo z, distinto de 0, al complejo w que cumple que $z\cdot w=1$. Se lo simboliza z^{-1} y se calcula como $z^{-1}=\frac{1}{z}$

En el ítem **c.** hay que dividir dos números complejos. La división se define, al igual que con los números reales, como la multiplicación de un número por el inverso de otro. Luego:

$$\frac{1-5i}{4+3i}=(1-5i)\cdot(4+5i)^{-1}=(1-5i)\cdot\frac{1}{4+3i}=(1-5i)\cdot\frac{1.(4-3i)}{(4+3i).(4-3i)}=$$

$$=(1-5i)\cdot\frac{(4-3i)}{16-9i^2}=(1-5i)\cdot\frac{(4-3i)}{25}=(1-5i)\cdot(\frac{4}{25}-\frac{3}{25}i)=$$

$$=(1\cdot\frac{4}{25}-5\cdot\frac{3}{25})+(-5\cdot\frac{4}{25}-1\cdot\frac{3}{25})i=-\frac{11}{25}-\frac{23}{25}i$$

Para resolver la ecuación planteada en **d.**, es necesario despejar z

$$i\cdot z+1=2z \Leftrightarrow i\cdot z-2z=-1 \Leftrightarrow z\cdot(i-2)=-1 \Leftrightarrow z=\frac{-1}{i-2}=\frac{-1}{-2+i} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{-1\cdot(-2-i)}{(-2+i)\cdot(-2-i)}=\frac{2+i}{4-i^2}=\frac{2+i}{5} \Leftrightarrow z=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$$

Para dividir dos números complejos se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del divisor ($w\neq 0$).

$$\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\,i}{c^2+d^2}$$

Problema 6

Calcular i^{157}.

Para resolver este cálculo hay dos posibilidades. Una es multiplicar 157 veces el número i por sí mismo. Si bien es un método correcto, es muy largo.

Otra forma es calcular varias potencias de i para saber si hay alguna relación entre ellas.

$$i^0=1\ ;\ i^1=i\ ;\ i^2=-1\ ;\ i^3=-i\ ;\ i^4=1$$

En el cuadro que sigue se muestra el cálculo del número complejo i elevado a distintos exponentes naturales:

Potencias de "i"		
$i^0 = 1$	$i^4 = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$	$i^9 = i^4 \cdot i^4 \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$	$i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$	$i^{11} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot 1 \cdot (-i) = -i$

Entonces, como $157 = 39{\cdot}4 + 1$,

$$i^{157} = i^{(39\cdot 4+1)} = i^{39\cdot 4} \cdot i^1 = (i^4)^{39} \cdot i = 1^{39} \cdot i = i$$

O, como el resto de dividir a 157 por 4 es 1, es posible decir que $i^{157} = i^1 = i$.

Los resultados de las potencias de i se repiten en bloques de cuatro. Esto es cierto para todas las potencias naturales, lo que permite saber el resultado de i^N con solo saber el resto de la división de N por 4 y los resultados de i^0, i, i^2 e i^3.

Si $N = 4k + r$, donde k y r son números naturales y $0 \leq r \leq 3$,

$i^N = i^{(4k+r)} = (i^4)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r$

Módulo de un número complejo

Problema 7

a. ¿A qué distancia se encuentra el número complejo $z = 4 + 3i$ del origen de coordenadas?

b. Encontrar todos los números complejos que están a distancia 1 del origen de coordenadas.

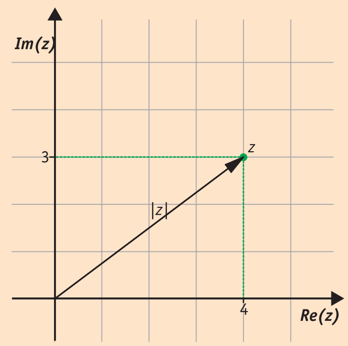
Para calcular la distancia de $z = 4 + 3i$ al origen de coordenadas puede utilizarse el Teorema de Pitágoras.

Si se llama $|z|$ a la distancia buscada:

$|z|^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow |z|^2 = 25 \Leftrightarrow$

$|z| = \sqrt{25} \Leftrightarrow |z| = 5$

Luego, la distancia entre z y el origen de coordenadas es 5.



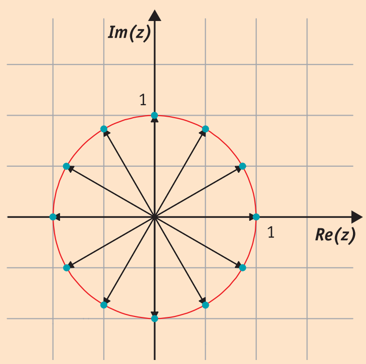
Se llama módulo de un complejo z a la distancia en el plano complejo entre z y el complejo 0 y se la simboliza $|z|$.

El **módulo** de un número complejo $z = a + bi$ se calcula como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Como el módulo de un número complejo es la distancia que hay entre el número y 0, se puede asegurar que $|z|$ es un número real mayor o igual que 0.

En la recta numérica hay solo dos números que distan 1 del cero, ellos son 1 y −1. En cambio, en el plano hay infinitos puntos que cumplen con esa condición; es decir hay infinitos números complejos z que verifican $|z| = 1$. Todos ellos determinan una circunferencia de radio 1 y centro en el complejo 0.



Ecuaciones con números complejos

Problema 8

Encontrar todos números reales y complejos que verifican cada una de las ecuaciones dadas a continuación.

a. $z^2 + 36 = 0$ **b.** $z^4 = 1$ **c.** $z^2 = -5$ **d.** $x^2 + 4x + 5 = 0$

Como los números reales son también complejos, para resolver este problema se presentarán simultáneamente la búsqueda de soluciones en $\mathbb{R}$ así como en $\mathbb{C}$.

Al despejar z en la ecuación **a.** queda $z^2 = -36$:

En $\mathbb{R}$	En $\mathbb{C}$
Ningún número real elevado al cuadrado da –36.	$z = 6i$ porque $(6i)^2 = 36 \cdot i^2 = 36 \cdot (-1) = -36$
	$z = -6i$ porque $(-6i)^2 = (-6) \cdot i^2 = 36 \cdot (-1) = -36$
$S = \varnothing$	$S = \{6i\,;-6i\}$

Para $z^4 = 1$

En $\mathbb{R}$	En $\mathbb{C}$
$z = 1$ porque $1^4 = 1$	$z = 1$ porque $1^4 = 1$
	$z = -1$ porque $(-1)^4 = 1$
$z = -1$ porque $(-1)^4 = 1$	$z = i$ porque $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
	$z = -i$ porque $(-i)^4 = (-1)^4\,(i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
$S = \{1\,;-1\}$	$S = \{1\,;-1\,;i\,;-i\}$

Para $z^2 = -5$

En $\mathbb{R}$	En $\mathbb{C}$
Ningún número real elevado al cuadrado da –5.	$z = \sqrt{5}\,i$ porque $(\sqrt{5}\,i)^2 = (\sqrt{5})^2 \cdot i^2 = 5 \cdot (-1) = -5$
	$z = -\sqrt{5}\,i$ porque $(-\sqrt{5}\,i)^2 = (-\sqrt{5})^2 \cdot i^2 = 5 \cdot (-1) = -5$
$S = \varnothing$	$S = \{\sqrt{5}\,i\,;-\sqrt{5}\,i\}$

Finalmente, para resolver la parte **d.** es conveniente pensar que la ecuación $x^2 + 4x + 5 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, porque:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \,.\, 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Sin embargo, en $\mathbb{C}$, hay dos soluciones. Se trata de encontrar números que elevados al cuadrado den – 4 y éstos son $2i$ y $-2i$. Luego, las dos soluciones complejas de la ecuación son: $x = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i \cdot S = \{-2+i\,;-2-i\}$.

Por lo observado en estos ejemplos, en los números complejos hay raíces cuadradas de números negativos; por eso, las ecuaciones cuadráticas tienen siempre dos soluciones. En cambio, en los números reales, pueden tener dos soluciones, una o ninguna solución.

Como la solución de la ecuación $z^2 = -36$ es $S = \{6i\,;-6i\}$, se dice que las raíces cuadradas de –36 son $6i$ y $-6i$. Esta ecuación es un ejemplo de una ecuación que no tiene solución en el campo de los números reales, dado que ningún número real elevado a una potencia par da por resultado un número negativo. En los números complejos no se habla de la operación radicación sino de las raíces cuadradas, de las raíces cúbicas, etc. de un complejo, y deja de usarse el símbolo $\sqrt[N]{\ }$.

En el conjunto de los números reales, $\sqrt[4]{1} = 1$. En cambio, en el conjunto de los números complejos, las raíces cuartas de 1 son $1, -1, i$ y $-i$.

En el conjunto de los números reales, no está definida la raíz cuadrada de –5 pues es un número negativo. En cambio, en los números complejos, las raíces cuadradas de –5 son $\sqrt{5}i$ y $-\sqrt{5}i$.

Problema 9

a. Encontrar los números complejos que verifican que: $i \cdot x^2 + 1 = 0$.

b. ¿Cuáles son los números que cumplen que $z^3 - 1 = 0$?

Al despejar la ecuación dada en **a.** queda:

$$i \cdot x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{-1}{i} \cdot \frac{(-i)}{(-i)} = \frac{i}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = i$$

Es necesario encontrar, entonces, números complejos x que elevados al cuadrado den por resultado i.

Si se escribe a x en su forma binómica, $x = a + bi$, con a y b números reales, la ecuación queda:

$(a+bi)^2 = i$	Se reemplaza x por su forma binómica.
$a^2 + 2abi + (bi)^2 = i$	Se aplica la propiedad distributiva.
$a^2 + 2abi + b^2 i^2 = i$	Se distribuye el cuadrado.
$a^2 + 2abi - b^2 = i$	Se reemplaza i^2 por -1.
$(a^2 - b^2) + 2abi = i$	Se agrupa.

Como dos números complejos son iguales cuando tienen su parte real y su parte imaginaria respectivamente iguales, entonces:

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \text{y} \quad 2ab = 1$$

De la segunda ecuación: $b = \frac{1}{2a}$, siempre que $a \neq 0$

Reemplazando b en la primera:

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - \frac{1}{4a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4a^4 - 1}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot a^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^4 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow |a| = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{o} \quad a = -\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $b = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

Si $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $b = \frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

El conjunto solución de la ecuación es entonces:

$$S = \{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \,;\, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\}$$

Una solución de la ecuación planteada en **b.** es claramente $z = 1$, porque $1^3 = 1$.

Pero, *¿habrá otra?*

Si se utiliza la forma binómica de z y de 1.

$$z^3 = 1 \iff (a+bi)^3 = 1 \iff a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = 1 + 0i \iff$$
$$\iff a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = 1 + 0i \iff a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = 1 + 0i \iff$$
$$\iff (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\,i = 1 + 0i$$

Si se igualan partes reales e imaginarias: $a^3 - 3ab^2 = 1$ y $3a^2b - b^3 = 0$

Al considerar la segunda ecuación:
$3a^2b - b^3 = 0 \iff b \cdot (3a^2 - b^2) = 0 \iff b = 0$ o $3a^2 - b^2 = 0 \iff b = 0$ o $b^2 = 3a^2$

Si $b = 0$, entonces (reemplazando en la primera ecuación):
$a^3 - 3ab^2 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \iff a = 1 \Rightarrow z_1 = 1 + 0 \cdot i = 1$ es una solución (la real ya conocida).

Si $b^2 = 3a^2$ entonces, reemplazando en la otra ecuación:
$a^3 - 3a\,b^2 = 1 \Rightarrow a^3 - 3a3a^2 = 1 \iff a^3 - 9a^3 = 1 \iff -8 \cdot a^3 = 1 \iff$
$\iff a^3 = -\frac{1}{8} \iff a = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 3 \cdot a^2 \Rightarrow b^2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \iff b^2 = \frac{3}{4} \iff$
$\iff b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

El conjunto solución es entonces:
$$S = \{1\,;\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,;\, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$$

Existe un único número real que elevado al cubo da 1, o sea existe una única raiz cúbica de 1; $\sqrt[3]{1} = 1$. En los números complejos, las raíces cúbicas de 1 son 1; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

En la siguiente tabla se presenta una síntesis de las ecuaciones resueltas en el capítulo con sus respectivas soluciones en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$, con el fin de extraer algunas conclusiones:

Ecuación	Solución en $\mathbb{R}$	Solución en $\mathbb{C}$
$x^2 = -1$	ø	$\{i\,;-i\}$
$x^2 = -36$	ø	$\{6i\,;-6i\}$
$x^4 = 1$	$\{1\,;-1\}$	$\{1\,;-1\,;i\,;-i\}$
$x^2 = -5$	ø	$\{\sqrt{5}\,i\,;-\sqrt{5}\,i\}$
$x^2 - 4x + 5 = 0$	ø	$\{-2+i\,;-2-i\}$
$x^3 - 1 = 0$	$\{1\}$	$\{1\,;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,;-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$
$x^2 + 4 = 0$	ø	$\{2i\,;-2i\}$
$(x-3)^2 = 0$	$\{3\}$ (*doble*)	$\{3\}$ (*doble*)
$ix^2 - 1 = 0$	ø	$\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\}$

Por el estudio de los números reales, ya se sabe resolver ecuaciones como $(x-3)^2 = 0$. $(x-3)^2 = 0 \iff x-3 = 0$ o $x-3 = 0$, lo que conduce a que el 3 es dos veces raíz. Se dice en estos casos que la raíz es *doble* (por este motivo se dice que tiene dos raíces iguales). También hay ecuaciones que tienen raíces *triples*. Por ejemplo, $(x-1)^3 = 0$ quiere decir que $x-1 = 0$ o $x-1 = 0$ o $x-1 = 0$, lo que implica que el 1 es tres veces raíz.
Se dice también que una raíz doble es una raíz de *multiplicidad 2*, que una raíz triple es una raíz de *multiplicidad 3*, etcétera.
En la ecuación $(x+4)^6 = 0$, el -4 es una raíz de *multiplicidad 6*.

En las ecuaciones de la tabla se advierte una propiedad importante que tienen los números complejos: las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones, las ecuaciones cúbicas tienen tres, las ecuaciones de grado 4 tienen cuatro, etcétera (contando las raíces múltiples la cantidad de veces que corresponda). Ya era sabido, y la tabla confirma que esto no vale en los números reales.

Las ecuaciones de grado ***n*** tienen:
- ***n*** o menos soluciones reales,
- exactamente ***n*** soluciones complejas (incluyendo las reales contadas con su multiplicidad; esto es que una raíz doble se cuenta dos veces, una triple tres veces, etcétera.)

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

1. Resuelvan las siguientes operaciones:

a. $5-(2+3i)$ **b.** $(8+2i)-5i$ **c.** $(-2+i)\cdot(5-i)$

d. $\frac{3-i}{2+i}$ **e.** $\frac{4-i}{i}$ **f.** $(3-2i)^2$

g. $(8-9i)+(7-i)$ **h.** $-2\cdot(4-5i)+(2-i)\cdot(2+i)$ **i.** $(2-3i)^2$

2. Encuentren los números complejos z que verifiquen las siguientes ecuaciones.

a. $2z+i-5=3+8i$ **b.** $i-\frac{2}{z}=3-i$

3. Hallen el opuesto y el conjugado de los siguientes números y represéntenlos en el plano complejo:

a. $z_1=5-3i$ **b.** $z_2=-i$ **c.** $z_3=-8i$ **d.** $z_4=4$

4. Calculen:

a. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ **b.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ **c.** $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

5. Escriban si existen, en cada caso, un número complejo z que cumpla que:

a. $|z|=4$ y z está ubicado en el semieje imaginario negativo.

b. $Re\,(z)=Im\,(z)$ y z pertenece al cuarto cuadrante.

6. Si $z_1=1-2i$, $z_2=-i$ y $z_3=-2-2i$, calculen:

a. $\frac{z_1+z_2}{z_3}$ **b.** $(z_3-z_2\cdot z_1)^2$

7. Si $z_1=12-5i$, $z_2=-3+4i$, calculen:

a. $|z_1|$ **b.** $|z_2|$ **c.** $|z_1|+|z_2|$

d. z_1+z_2 **e.** $|z_1+z_2|$

8. Hallen la parte real y la imaginaria de los siguientes números complejos. Luego, ubíquenlos en el plano.

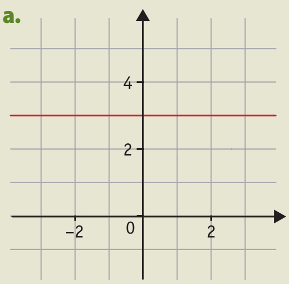
a. $z_1=-5-3i$ **b.** $z_2=1-i$

c. $z_3=-8i$ **d.** $z_4=8$

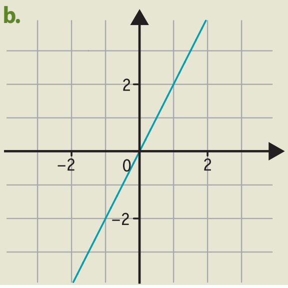
9. Escriban un complejo z tal que $Re\,(z)$ es irracional e $Im\,(z)$ es entero.

10. ¿Qué forma tendrán los números complejos que se encuentran sobre cada una de las rectas siguientes?

a.



b.



11. Resuelvan en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a. $2\cdot[z-(3-i)]-\frac{1}{2}z=4-i$ **b.** $4-\frac{z}{i}=z+2i$

12. Resuelvan en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a. $x^2=-100$ **b.** $x^2=100$ **c.** $x^2=-\frac{16}{9}$

d. $x^2=-8$ **e.** $x^4=16$ **f.** $x^2+x+\frac{5}{2}=0$

g. $-x^2+x-1=0$ **h.** $x^3=-8$ **i.** $x^2+x+1=0$

13. Resuelvan las siguientes ecuaciones, indiquen el conjunto solución en $\mathbb{C}$:

a. $z^2+i=0$ **b.** $z^3+i=0$

c. $z^2=1+i$ **d.** $z^3+27=0$

14. Analicen la validez de las siguientes afirmaciones. Justifiquen sus respuestas.

a. $-2\cdot\sqrt{2}\,i$ es solución de la ecuación $x^3+8x=0$

b. $1-i$ es solución de la ecuación $2i\cdot x^2+(3-i)\cdot x+1=0$

15. a. El número complejo $1-2\sqrt{2}\,i$ es solución de la ecuación $x^2-2x+9=0$. Verifíquenlo.

b. ¿Qué otro número complejo será solución de la ecuación anterior?

16. a. El número complejo $2-i$ es solución de la ecuación $x^2+2i\cdot x-5=0$. Verifíquenlo.

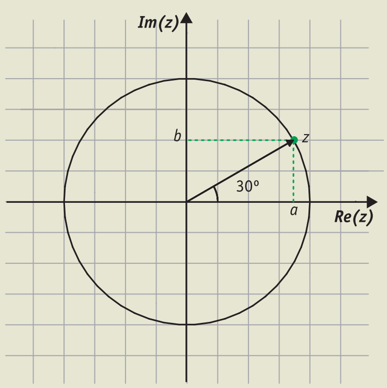
b. ¿Puede afirmarse que el número complejo $2+i$ será también solución?

17. ¿Cuántas soluciones tienen en $\mathbb{R}$ y cuántas tienen en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones? (no se pide que hallen cuáles son)

a. $x^3=50$ **b.** $x^2-104=0$ **c.** $x^4+181=0$

d. $x^6-32=0$ **e.** $x\cdot(x^2-91)\cdot(x^2+82)=0$

18. Según los datos de la siguiente figura y sabiendo que la circunferencia tiene radio 2, ¿cuál es el número complejo z?



AUTOEVALUACIÓN

Marquen las opciones que consideren correctas en cada caso.

1. Dado el número complejo $z = 2 - 5i$ se cumple que:

- **a** $\bar{z} = -2 + 5i$
- **b** $z^{-1} = -2+5i$
- **c** $|z| = 7$
- **d** Ninguna de las anteriores.

2. Un número complejo que elevado al cuadrado es imaginario puro es:

- **a** $2 - 2i$
- **b** $1 - 2i$
- **c** $3i$
- **d** Ninguna de las anteriores.

3. Un número complejo cuyo conjugado pertenece al tercer cuadrante y su módulo es mayor o igual que 5 es:

- **a** $-4 - 3i$
- **b** $-1 - i$
- **c** $4 + 4i$
- **d** Ninguna de las anteriores.

4. Una ecuación que tiene las mismas soluciones en $\mathbb{R}$ que en $\mathbb{C}$ es

- **a** $x^3 = -1$
- **b** $x^2 = -4$
- **c** $x^2 = 2$
- **d** Ninguna de las anteriores.

5. Una ecuación que tiene soluciones reales pero tiene otras soluciones que son complejas no reales es:

- **a** $x^3 = -1$
- **b** $x^2 = -4$
- **c** $x^2 = 2$
- **d** Ninguna de las anteriores.

6. Una ecuación cuyas soluciones son números imaginarios puros es:

- **a** $x^3 = -1$
- **b** $x^2 = -4$
- **c** $x^2 = 2$
- **d** Ninguna de las anteriores.

7. Un valor de A que hace que la ecuación $x^2 - 2x + A = 0$ tenga soluciones complejas no reales es:

- **a** 1
- **b** -1
- **c** 2
- **d** Ninguna de las anteriores.

8. Dadas las ecuaciones:

1. $x^2 + 9 = 0$ **2.** $x^2 - 9 = 0$

3. $x^4 - 81 = 0$ **4.** $x^4 + 81 = 0$

Dos de ellas que tienen una solución común, ellas son

- **a** 1. y 3.
- **b** 1. y 4.
- **c** 2. y 3.
- **d** Ninguna de las anteriores.

9. $1 + i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

- **a** $(1-i) \cdot x^2 - 2i = 2$
- **b** $(x-1)^2 + 1 = 0$
- **c** $(1-i) \cdot x - 2 = 0$
- **d** Ninguna de las anteriores.

10. Dados dos números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$

- **a** $|z+w| = |z| + |w|$
- **b** $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- **c** $z - \bar{z} = -2bi$
- **d** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- **e** Ninguna de las anteriores.

11. Si el conjugado de un número complejo pertenece al segundo cuadrante, entonces el número pertenece al

- **a** Primer cuadrante.
- **b** Segundo cuadrante.
- **c** Tercer cuadrante.
- **d** Cuarto cuadrante.
- **e** No es posible saber a qué cuadrante pertenece.

12. Si el opuesto de un número complejo pertenece al cuarto cuadrante, entonces el número pertenece al

- **a** Primer cuadrante.
- **b** Segundo cuadrante.
- **c** Tercer cuadrante.
- **d** Cuarto cuadrante.
- **e** No es posible saber a qué cuadrante pertenece.

13. Si el inverso de un número complejo pertenece al primer cuadrante, entonces el número pertenece al

- **a** Primer cuadrante.
- **b** Segundo cuadrante.
- **c** Tercer cuadrante.
- **d** Cuarto cuadrante.
- **e** No es posible saber a qué cuadrante pertenece.

14. Las afirmaciones verdaderas son:

- **a** El producto de dos números imaginarios puros es un número imaginario puro.
- **b** El producto de dos números complejos conjugados es un número real.
- **c** El módulo de un número complejo es igual al módulo de su conjugado.